Professur für Mathematik
Fakultät für Elektrische Energiesysteme
und Informationstechnik

der Bundeswehr Universität München

Praktikum Numerische Simulation in der Technik

Signalentzerrung bei Mehrwegeausbreitung und Störungen

Stichworte: Faltung, Ausgleichsrechnung, Optimales Lineares Modell

Betreuer: Richter

Termine: WT oder FT

Thema: Mehrwegeausbreitung eines Signals führt aufgrund unterschiedlicher Laufzeiten zu Interferenzen. Zusätzlich treten die Effekte einer unterschiedlichen Signaldämpfung auf jedem Ausbreitungsweg und einer Signalüberlagerung durch zufällige Störungen („Rauschen“) auf. Im Empfänger muss das ursprünglich gesendete Signal berechnet werden. Dies ist ein sogenanntes **Inverses Problem**.

Ausführliche Beschreibung: Bei der Übertragung eines analogen Signals

$$u : [t_1, t_2] \to \mathbb{R} \tag{1}$$

von einem Sender zu einem Empfänger kommt es dort abhängig von den Eigenschaften des Übertragungskanals zum Empfang zeitlich verzögerter Kopien des Signals u zum Beispiel durch Reflexion an Gebäuden. Bekannt sei der Übertragungskanal, der sich durch eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ modellieren lässt. Das empfangene Signal w ist durch

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)u(t-s)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} g(t-s)u(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

gegeben. Im ersten Integral wird die Funktion u außerhalb des Intervalls $[t_1, t_2]$ durch null fortgesetzt. Der Term $g(s)u(t-s)$ beschreibt das um s Zeiteinheiten versetzte Signal u, das um den Faktor $g(s)$ gedämpft wird. Dadurch wird der Signalverlust modelliert, der sich bei einer um s Zeiteinheiten verzögerten Ausbreitung ergibt. Durch die Integration wird die Überlagerung (Summation) dieser Signalkopien überschrieben. Das zweite Integral ergibt sich aus dem ersten durch eine Variablensubstitution und wegen des beschränkten Trägers der Funktion u. Im Folgenden wird die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-10t^2}, \tag{3}$$

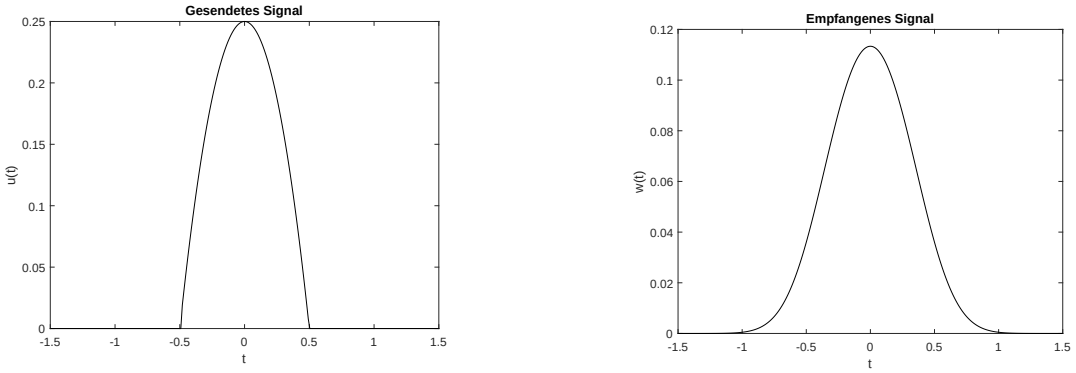

Abbildung 1: *Gesendetes und empgfangenes Signal*

als Modell für den Übertragungskanal verwendet. Betrachtet man etwa das Signal

$$u : [-0.5, 0.5] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto 0.25 - t^2, \tag{4}$$

so ergeben sich gesendetes und empfangenes Signal wie in Abbildung 1. Auf der Empfängerseite wird das Signal w abgetastet. Unterstellt man eine Abtastung an $n+1$ äquidistanten Stellen

$$-1.5 = t_0 < \ldots < t_n = 1.5,$$

so ergeben sich die Messwerte

$$w_i := w(t_i) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-10(t_i - s)^2}(0.25 - s^2)\, ds, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{5}$$

Aus diesen Messwerten soll eine möglichst gute Näherung für u gewonnen werden.[1] Beispielsweise könnte eine Näherung $\hat{u}$ für u als ein Fourierpolynom vom Grad (höchstens) m angesetzt werden. Da die Signaldauer von u nicht a priori bekannt sein muss und da die Messwerte von w zu Zeitpunkten $t_i \in [-1.5, 1.5]$ zur Verfügung stehen, bietet es sich an, das unbekannte Signal u im Intervall $[-1.5, 1.5]$ der Länge $T = 3$ zu rekonstruieren und dafür eine Fourier-Entwicklung

$$\hat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} \left(a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) \right) \tag{6}$$

zu verwenden. Anstelle von (5) ergeben sich dann die Gleichungen

$$w_i = \int_{-\infty}^{\infty} g(t_i - s)\hat{u}(s)\, ds, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{7}$$

[1] Dieses Problem kann sich auch in anderer Form stellen: Wird ein dem Empfänger vorab bekanntes Signal u geschickt, dann soll daraus eine Näherung des Kanals g berechnet werden. Diese Aufgabe wird als Kanalschätzung bezeichnet.

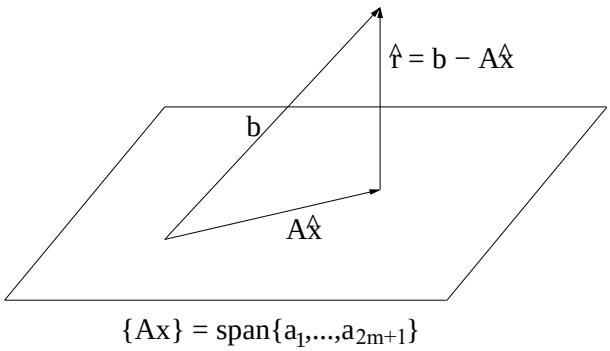

Abbildung 2: *Lösung des Ausgleichsproblems*

welche als ein lineares Gleichungssystem (LGS) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für die unbekannten Koeffizienten $\boldsymbol{x} = (a_0, b_1, a_1, \ldots, b_m, a_m)^\top \in \mathbb{R}^{2m+1}$ geschrieben werden können. Die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ besteht aus den Messwerten w_i und die Komponenten $a_{i,j}$ der Matrix A sind die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t_i - t)\sin(2\pi jt/T)\,dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t_i - t)\cos(2\pi jt/T)\,dt.$$

Da der Ansatz (6) das Signal u nicht exakt repräsentieren und damit die Messwerte w_i nicht exakt reproduzieren kann, besitzt das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ keine Lösung. Man löst ersatzweise das sogenannte **lineare Ausgleichsproblem**

$$\text{Bestimme } \hat{\boldsymbol{x}} \text{ so, dass } \|\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}\|_2^2 \le \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2^2 \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2m+1}. \tag{8}$$

Die Abb. 2 illustriert die Idee, die hinter (8) steht: Es ist $\{Ax\} = \text{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{2m+1}\}$ der lineare Raum, der von den Spalten $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{2m+1}$ der Matrix A aufgespannt wird. Das LGS

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2m+1} x_{2m+1} = \boldsymbol{b}$$

kann nicht gelöst werden, wenn $\boldsymbol{b}$ nicht in diesem Raum liegt. In diesem Fall sucht man ein $\hat{\boldsymbol{x}}$, so dass $A\hat{\boldsymbol{x}}$ möglichst dicht (gemessen in der Euklidischen Norm) an $\boldsymbol{b}$ liegt. Dieses $\hat{\boldsymbol{x}}$ erhält man, indem man die orthogonale Projektion $P\boldsymbol{b}$ von $\boldsymbol{b}$ in den Raum $\{A\boldsymbol{x}\}$ betrachtet und das LGS

$$A\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \tag{9}$$

löst. Den Vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}$ bezeichnet man als Residuum und es gilt

$$\|\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 = \|\boldsymbol{r}\|_2 = \|\boldsymbol{b} - P\boldsymbol{b}\|_2. \tag{10}$$

Für $m = 8$ und $n = 256$ erhält man das in Abb. 3 gezeigte Resultat.

Die bisher beschriebene Situation ist insofern unrealistisch, als im Empfänger niemals die *exakten* Werte $w(t_i)$ bekannt sind, da beim Abtasten und Digitalisieren der Werte Messungenauigkeiten und Quantisierungsfehler auftreten. Man muss deswegen davon ausgehen, dass nur Messwerte

$$\tilde{w}_i = w(t_i) + n_i, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{11}$$

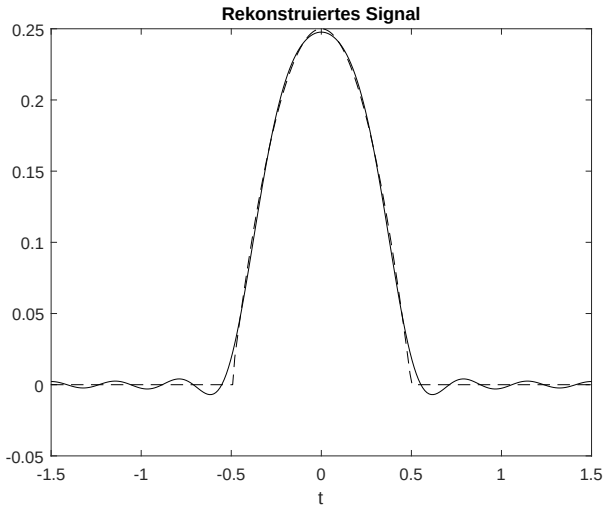

Abbildung 3: *Rekonstruiertes Signal*

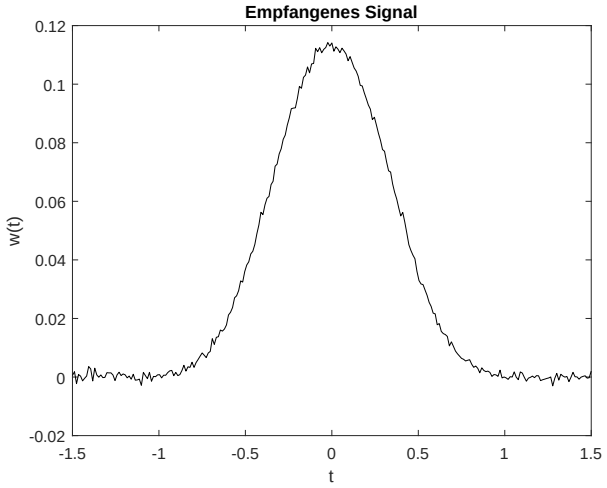

Abbildung 4: *Empfangenes Signal, gestört*

bekannt sind, wobei die Werte $n_i \in \mathbb{R}$ zufällige, unbekannte Störungen sind, von denen angenommen wird, dass sie Realisierungen von normalverteilten Zufallsvariablen N_i mit Erwartungswert 0 und Streuung $\sigma > 0$ sind. Weiter wird angenommen, dass die Zufallsvariablen $N_1, \ldots, N_m$ stochastisch unabhängig sind und alle dieselbe Streuung besitzen. Das empfangene Signal (beziehungsweise seine Abtastwerte) sieht dann wie in Abb. 4 aus. Verwendet man weiterhin den Fourier-Ansatz (6) und löst das resultierende lineare Ausgleichsproblem (wieder mit $m = 8$ und $n = 256$), so erhält man eine unbrauchbare Rekonstruktion von u, siehe Abb. 5. Im zweiten Teil des Praktikums wird es darum gehen, auch im Fall gestörter Messwerte eine aussagekräftige Rekonstruktion zu erhalten.

1. Aufgabe. Reproduzieren Sie die Abb. 1, indem Sie $n + 1 = 257$ Messwerte gemäß (5) mit einem MATLAB-Programm berechnen. Benutzen Sie die MATLAB-

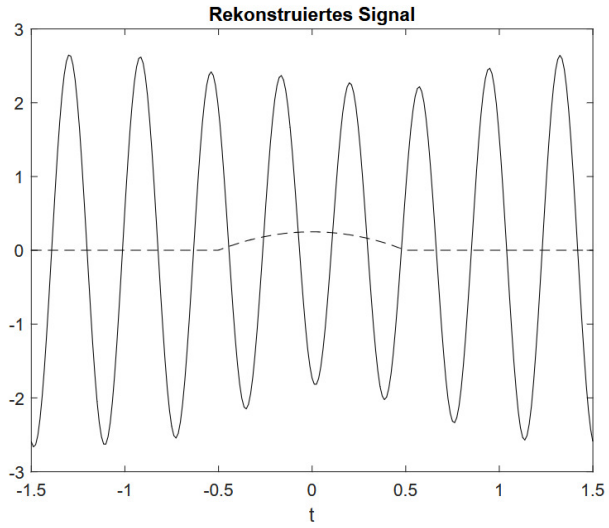

Abbildung 5: *Rekonstruiertes Signal bei Störungen*

Funktion quadgk zur numerischen Berechnung der benötigten Integrale.

2. Aufgabe. Reproduzieren Sie die Abb. 3. Setzen Sie dazu eine Signalrekonstruktion wie in (6) an. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gemäß (7) auf, indem Sie die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ und die Komponenten $a_{i,j}$ der Matrix A berechnen. Bei der Berechnung der Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t_i - t)\sin(2\pi jt/T)\,dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t_i - t)\cos(2\pi jt/T)\,dt$$

können Sie wegen des schnellen Abfalls der Integranden die Integrationsgrenze $-\infty$ durch den Wert -10 und die Integrationsgrenze ∞ durch den Wert 10 ersetzen und wiederum die MATLAB- Funktion quadgk benutzen. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem zum LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit dem Backslash-Operator von MATLAB (siehe Dokumentaion zu `mldivide`).

3. Aufgabe. Reproduzieren Sie zu den Abb. 4 und 5 ähnliche Abbildungen, indem Sie zu den gemäß der 1. Aufgabe berechneten Werten w_i zufällige Störungen n_i hinzuaddieren. Benutzen Sie zur Erzeugung der Werte n_i die MATLAB-Funktion `randn` und wählen Sie $\sigma = 0.005$.

Die oben festgestellten Problemen rühren daher, dass nach einem Signal $\tilde{u}$ gesucht wurde, welches die beobachteten gestörten Messdaten $\tilde{w}_i$ reproduziert, anstelle nur die w_i zu reproduzieren. Das gesendete Signal u kann jedoch keine Erklärung des zufälligen Störungen $\tilde{w}_i - w_i$ liefern. Im nun folgenden Praktikumsteil soll die Rekonstruktion verbessert werden, damit sie auch bei gestörten Daten funktioniert. Es

werden folgende Abkürzungen für die Ansatzfunktionen aus (6) verwendet:

$$\varphi_1 := \frac{1}{2}, \quad \varphi_{2j} := \cos\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t\right), \ \varphi_{2j+1} := \sin\left(\frac{2\pi j}{T} \cdot t\right), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Diese Funktionen spannen den linearen Raum

$$X_{2m+1} = \text{span}\,\{\varphi_1, \ldots \varphi_{2m+1}\} \tag{12}$$

aller Fourierpolynome vom Grad höchstens m auf. Die Komponenten der Matrix A des LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (entsprechend (7)) lauten

$$a_{i,j} := \int_{\mathbb{R}} g(t_i - s)\varphi_j(s)\, ds, \quad i = 0, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, 2m+1.$$

Die j-te Spalte der Matrix A, die zur Ansatzfunktion φ_j gehört, wird mit $\boldsymbol{a}_j$ bezeichnet. Die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ hat die Komponenten w_i. Demgegenüber wird noch eine rechte Seite $\tilde{\boldsymbol{b}}$ eingeführt, die die Komponenten $\tilde{w}_i = w_i + n_i$ hat. Das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ bzw. $A\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ bezeichnet man als ein **lineares Modell** oder auch als einen **(linearen) Regressionsansatz** und die Spalten $\boldsymbol{a}_j$ von A nennt man **Regressoren**. Ein Regressionsansatz ist sinnvoll, wenn das LGS $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (bis auf einen kleinen Fehler) lösbar ist – man sagt dann auch, die Gleichungen seien (annähernd) konsistent und dies bedeutet, dass das gesuchte Signal u nach Maßgabe der zur Verfügung stehenden Daten w_i ausreichend genau durch eine Funktion aus X_{2m+1} dargestellt werden kann. In diesem Fall gilt also (näherungsweise), dass $\boldsymbol{b}$ als Linearkombination der Regressoren geschrieben werden kann:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1 x_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2m+1} x_{2m+1} = \boldsymbol{b}$$

oder anders gesagt: Die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ liegt in den linearen Raum, der von den Spalten von A aufgespannt wird. Dies wird stets vorausgesetzt. Außerdem wird stets vorausgesetzt, dass alle Spalten von A linear unabhängig sind, ansonsten wären Ansatzfunktionen überflüssig. Es gibt aber noch eine andere Art der „Überflüssigkeit“: Wenn nämlich für $\boldsymbol{b}$ in guter Näherung bereits

$$\boldsymbol{b} \approx x_{j_1}\boldsymbol{a}_{j_1} + \ldots + x_{j_k}\boldsymbol{a}_{j_k}$$

für eine Teilmenge $\{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, 2m+1\}$ von Indizes gilt, dann würde bereits eine entsprechende Teilmenge $X_k \subset X_{2m+1}$ von Ansatzfunktionen zur Approximation von u genügen. Dann sollte das Rekonstrukt auch nur im Raum X_k angesetzt werden, so dass keine Freiheitsgrade bleiben, die „zur Erklärung der Datenstörungen missbraucht werden können“. Die Elemente von X_k sollen nachfolgend als **signifikant** bezeichnet werden. Nun wird eine Strategie zur Auswahl der signifikanten Ansatzfunktionen aus X_{2m+1} besprochen. Dann wird ausprobiert, welchen Effekt es hat, statt des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ beziehungsweise des Ausgleichsprobems

$$\text{Minimiere} \quad \|A\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2m+1}, \tag{13}$$

ein reduziertes Gleichungssystem / Ausgleichsproblem zu lösen, bei dem nur die Spalten mit Indizes $j_1, \ldots, j_k$ in der Matrix A verbleiben.

Es werden alle Basisfunktionen φ_j in der Reihenfolge aufsteigender Indizes daraufhin untersucht, ob diese „für die Erklärung der beobachteten Messdaten $\tilde{\boldsymbol{b}}$ signifikant sind". Für einen festen Index j sei die Signifikanz von φ_j zu untersuchen. Von den vorher bereits begutachteten Basisfunktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$ seien $r \leq j$ Funktionen $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_r}$ als signifikant ausgewählt. Diese spannen im „Beobachtungsraum" $\mathbb{R}^{n+1}$ (das ist der Raum, in dem $\tilde{\boldsymbol{b}}$ liegt) den r-dimensionalen Teilraum

$$H_j := \text{span}\,\{A_j x;\ x \in \mathbb{R}^r\} \tag{14}$$

auf, wobei $A_j \in \mathbb{R}^{n+1,r}$ durch Auswahl der Spalten mit Indizes $j_1, \ldots, j_r$ aus A entsteht. Nähme man zu $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_r}$ noch die Ansatzfunktion φ_j hinzu, dann würde im Beobachtungsraum der Teilraum

$$S_j := \text{span}\left\{\tilde{A}_j x;\ x \in \mathbb{R}^s\right\} \tag{15}$$

der Dimension $s = r+1$ aufgespannt, wobei $\tilde{A}_j \in \mathbb{R}^{n+1,s}$ jene Matrix ist, die aus der Erweiterung von A_j um die Spalte j von A entsteht. Weiter sei P_{H_j} der orthogonale Projektor von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf H_j und P_{S_j} der orthogonale Projektor von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf S_j. Entsprechend den Annahmen über die Datenstörungen n_i wird angenommen, dass $\tilde{\boldsymbol{b}}$ Realisierung einer Zufallsvariable

$$B \sim \mathcal{N}_{n+1}(\boldsymbol{b}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

ist, also einer Zufallsvariable, die $(n+1)$-dimensional normalverteilt ist mit Erwartungswert $\boldsymbol{b}$ und Kovarianzmatrix $\sigma^2\mathbf{I}$.

Man definiert nun die Zufallsvariable

$$F = \frac{n+1-s}{s-r} \cdot \frac{\|P_{S_j}B \ - \ P_{H_j}B\|_2^2}{\|B \ - \ P_{S_j}B\|_2^2}.$$

Unter der Annahme, dass $\boldsymbol{b} \in H_j$, lässt sich zeigen, dass F eine **Fisher-Verteilung** mit Parametern $(s-r, n+1-s)$ hat, in Zeichen

$$F \sim \mathcal{F}_{(s-r,n+1-s)},$$

siehe etwa [1], Satz 12.17. Man wählt nun ein sogenanntes **Signifikanzniveau** als eine kleine positive Zahl $\alpha \in (0,1)$, etwa $\alpha = 0.01$. Für die vorliegende Realisierung $\tilde{\boldsymbol{b}}$ von B wird sodann der Wert

$$f := \frac{n+1-s}{s-r} \cdot \frac{\|P_{S_j}\tilde{\boldsymbol{b}} \ - \ P_{H_j}\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2}{\|\tilde{\boldsymbol{b}} \ - \ P_{S_j}\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2} \tag{16}$$

als Realisierung der (unter der Annahme $\boldsymbol{b} \in H_j$) Fisher-verteilten Zufallsvariable F berechnet. Dann prüft man, ob die Ungleichung

$$P(F \geq f) < \alpha \tag{17}$$

erfüllt ist. Hier ist $P(F \geq f)$ die Wahrscheinlichkeit, dass F einen Wert größer als oder gleich f annimmt. Unter der Hypothese $\boldsymbol{b} \in H_j$ ist $F \sim \mathcal{F}_{(s-r,n+1-s)}$ und $P(F \geq f)$ kann berechnet werden. Liegt die Wahrscheinlichkeit $P(F \geq f)$ unterhalb der (niedrigen) Schranke α, so wird die Hypothese $\boldsymbol{b} \in H_j$ verworfen, denn sie bietet keine hinreichend glaubwürdige Erklärung für den beobachteten Wert f von F. Man erwartet dann, dass auch die Basisfunktion φ_j einen signifikanten Beitrag zur Erklärung der Daten $\boldsymbol{b}$ liefern kann und erweitert den bereits gefundenen Satz von Basisfunktionen $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_r}$ um das Element φ_j. In diesem Fall wird r um 1 erhöht, ansonsten bleibt r gleich. Anschließend wird das Verfahren mit dem Index $j+1$ fortgesetzt, das heißt die nächste Basisfunktion wird auf Signifikanz getestet.

Das beschriebene Verfahren ist eine rudimentäre Form der sogenannten „schrittweisen Anpassung eines linearen Modells“, wie es beispielsweise in der Funktion `stepwiselm` in Matlab implementiert ist.

In den folgenden Aufgaben soll das oben beschriebene Vorgehen in ein MATLAB-Programm umgesetzt werden.

4. Aufgabe. Berechnung der Werte f aus (16) und $P(F \geq f)$ aus (17). Wie in [1], Abb. 12.3 erklärt, gilt nach dem Satz von Pythagoras die Beziehung

$$\|P_{S_j}\tilde{\boldsymbol{b}} \; - \; P_{H_j}\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2 = \|\tilde{\boldsymbol{b}} - P_{H_j}\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2 \; - \; \|\tilde{\boldsymbol{b}} - P_{S_j}\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2.$$

Weiterhin gilt: Ist $\tilde{x}$ die Lösung des Ausgleichsproblems der Minimierung von $\|\tilde{b} - A\tilde{x}\|_2^2$, dann ist $A\tilde{\boldsymbol{x}} = P_S\tilde{b}$ mit dem orthogonalen Projektor P_S auf den von den Spalten der Matrix A aufgespannten Raum. Folglich gilt wie in (10)

$$\|\tilde{\boldsymbol{b}} - P_S\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2 = \|\tilde{\boldsymbol{b}} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2^2.$$

Gleichermaßen gilt dann

$$\|\tilde{\boldsymbol{b}} - P_{H_j}\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2 = \|\tilde{\boldsymbol{b}} - A_j\boldsymbol{x}_H\|_2^2$$

mit der Lösung $\boldsymbol{x}_H$ des Ausgleichsproblems der Minimierung von $\|\tilde{\boldsymbol{b}} - A_j\boldsymbol{x}\|_2^2$ gemäß (14) und analog gilt

$$\|\tilde{\boldsymbol{b}} - P_{S_j}\tilde{\boldsymbol{b}}\|_2^2 = \|\tilde{\boldsymbol{b}} - \tilde{A}_j\boldsymbol{x}_S\|_2^2$$

mit der Lösung $\boldsymbol{x}_S$ des Ausgleichsproblems der Minimierung von $\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \tilde{A}_j\boldsymbol{x}\|_2^2$ gemäß (14). Mit diesen Angaben sollten Sie den Wert f über die Lösung zweier Ausgleichsprobleme berechnen können. Informieren Sie sich ferner darüber, wie Sie die

Wahrscheinlichkeit $P(F \geq f)$ mit MATLAB berechnen können.

5. Aufgabe. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [coeff,active] = modellAuswahl(A,b).
```

Eingabe sind die Matrix A und die rechte Seite $\tilde{\boldsymbol{b}}$ des linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$. Es sollen alle Regressoren (Spalten von A) bestimmt werden, die einen „signifikanten Beitrag“ zur Erklärung der Daten $\tilde{\boldsymbol{b}}$ liefern können. Es soll `active(j)=1` sein, wenn die j-te Spalte von A als signifikant ausgewählt wurde und `active(j)=0` sonst. In dem Fall, dass r Spalten als signifikant ausgewählt und in eine Matrix $\tilde{A}_r \in \mathbb{R}^{n+1,r}$ zusammengefasst wurden enthalte `coeff` die r Komponenten der Lösung des Ausgleichsproblems zu $A_r\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$.

6. Aufgabe. Testen Sie das Verfahren fr $n = 256$ und Werte m bis zur Größe $m = 25$.

7. Aufgabe (Zusatz). Informieren Sie sich über die in MATLAB implementierte Funktion `stepwiselm`, mit der nach ähnlichen Regeln eine Auswahl von Spalten von A (von Regressoren) vorgenommen wird. Vergleichen Sie die Ergebnisse dre eigenen Implementierung mit denen von `stepwiselm`.

Literatur:

[1] H.-O. Georgii, *Stochastik, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, de Gruyter, 5. Auflage, 2015.