Professur für Mathematik
Fakultät für Elektrische Energiesysteme
und Informationstechnik

der Bundeswehr Universität München

Praktikum Numerische Simulation in der Technik

Schätzung bei verrauschten Daten: Lineares, Erweitertes und Geruchloses Kalman-Filter

Stichworte: Schätzung, Filterung von Rauschen, Optimierung
Betreuer: Marqués

Termine: WT oder FT

Thema: Ein sich veränderndes, dynamisches System genau zu modellieren ist eine schwierige Aufgabe, wegen der Anwesenheit von Rauschen und wegen Unsicherheiten in der Beschreibung der Dynamik. Diese Schwierigkeiten werden noch verstärkert, wenn Nichtlinearitäten in der untersuchten Dynamik vorkommen. Das Kalman-Filter ist eine der am meisten eingesetzten Methoden, mit diesen Problemen fertig zu werden.

Ausführliche Beschreibung: Sei ein dynamisches System, welches durch einen n-komponentigen, zeitabhängigen Vektor $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (als Zustandsvektor bezeichnet) beschrieben wird und welches durch einen p-komponentigen, zeitabhängigen Vektor $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ (als Inputvektor bezeichnet) gesteuert wird. Im Allgemeinen ist jedoch der Wert jeder der Komponenten im Zustandsvektorder nicht messbar (aus technischen oder Kosten-Gründen) und daher das einzige, was an jedem Zeitpunkt aus dem dynamischen System erfahren wird ist der m-komponentige Vektor $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ mit $m < n$ (als Ausgangs- oder Messvektor bezeichnet). Erschwert wird die Lage, da sowohl der Zustandsvektor wie der Inputvektor oder der Outputvektor nicht bei einem beliebig feinen t aufgelöst werden können, sondern nur an diskreten Zeitkoordinaten $t = k\,\Delta t$ zur Verfügung stehen, mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ und Δt als feste Dauer eines Zeitschritts.

Somit wird aus dem zeitkontinuierlichen Index t nun ein zeitdiskreter, ganzzahliger Index k. Die daraus resultierende **zeitdiskrete Dynamik** wird durch eine Gruppe an algebraischen Gleichungen beschrieben, welche aus dem Zustand und dem Input beim aktuellen k-ten Zeitschritt der Zustand beim darauf folgenden $(k+1)$-ten Zeitschritt bestimmt wird, zusammen mit der Beschreibung, wie der Messausgang beim $(k+1)$-ten Zeitschritt aus dem Zustand entsteht

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big) \\ \boldsymbol{y}(k+1) &= \boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k+1)\Big) \end{cases} \tag{1}$$

Dabei stellt $\boldsymbol{f}$ ein n-komponentiges Vektorfeld und $\boldsymbol{h}$ ein m-komponentiges Vektorfeld dar, im Allgemeinen aus nichtlinearen Funktionen bestehend

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\Big(\overbrace{x_1(k), \ldots, x_n(k)}^{\boldsymbol{x}(k)}, \overbrace{u_1(k), \ldots, u_p(k)}^{\boldsymbol{u}(k)} \Big) \\ \vdots \\ f_n\Big(\underbrace{x_1(k), \ldots, x_n(k)}_{\boldsymbol{x}(k)}, \underbrace{u_1(k), \ldots, u_p(k)}_{\boldsymbol{u}(k)} \Big) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ \vdots \\ y_m(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1\Big(\overbrace{x_1(k+1), \ldots, x_n(k+1)}^{\boldsymbol{x}(k+1)} \Big) \\ \vdots \\ h_m\Big(\underbrace{x_1(k+1), \ldots, x_n(k+1)}_{\boldsymbol{x}(k+1)} \Big) \end{pmatrix}.$$

Ein wichtiger Sonderfall der zeitdiskreten Dynamik (1) entsteht, wenn alle Komponenten in $\boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big)$ und in $\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k)\Big)$ eine lineare Abhängigkeit in der Komponenten des Zustands- und Inputvektors $\boldsymbol{x}(k)$ und $\boldsymbol{u}(k)$ aufweisen

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{x}(k+1) & = A_d\, \boldsymbol{x}(k) + B_d\, \boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k+1) & = C_d\, \boldsymbol{x}(k+1) \end{array} \right. \tag{2}$$

mit zeitlich konstanten Matrizen A_d, B_d und C_d. Dies wird als **lineare zeitdiskrete Dynamik** bezeichnet.

Jedoch beim Aufstellen der Gleichungen für die Dynamik und für die Ausgangsmessung passiert es häufig, dass einige Efekte wegen ihrer Komplexität nicht modelliert werden oder, insbesonders bei den Sensoren zur Messung des Ausgangs, Rauschen vorkommt

$$\text{Dynamik:} \quad \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big) + \underbrace{\ldots\ldots}_{\substack{\text{nichtmodellierte} \\ \text{Effekte}}},$$

$$\text{Ausgang:} \quad \boldsymbol{y}(k+1) = \boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k+1)\Big) + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{Sensorrauschen}}.$$

Diese nicht spezifierten Effekte werden von nun an in erster Näherung als zeitabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen beschrieben, welche **additiv** zu den Modellgleichungen zugefügt werden

$$\begin{aligned} \text{Dynamik:} \quad & \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big) + \boldsymbol{\eta}_x(k+1)\,, \\ \text{Ausgang:} \quad & \boldsymbol{y}(k+1) = \boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k+1)\Big) + \boldsymbol{\eta}_y(k+1)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Für dieses Praktikum werden alle normalverteilten Zufallsvariablen als mittelwertfrei angenommen werden: $\mathbb{E}\big[\eta_{x,\,i}\big] = 0 = \mathbb{E}\big[\eta_{y,\,j}\big]$ ($i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$), wobei $\mathbb{E}[\,]$ den Erwartungswert über alle möglichen Realisierungen der jeweiligen normalverteilten Zufallsvariablen darstellt. Ferner sind die Zufallsvariablen an verschiedenen Zeitpunkten unkorreliert miteinander

$$\mathbb{E}\Big[\eta_{x/y,\,i}(k)\,\eta_{x/y,\,j}(k')\Big] = 0\,, \quad \text{Zeitindex } k' \neq k\,,$$

und der Einfachheit halber wird zusätzlich vorausgesetzt (auch wenn dies im Allgemeinen nicht notwendig ist), dass unterschiedliche Komponenten der Zufallsvariablen unabhängig voneinander sind

$$\mathbb{E}\Big[\eta_{x,\,i}(k)\,\eta_{x,\,j}(k)\Big] = \begin{cases} \sigma^2_{x,\,i} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\,, \quad \mathbb{E}\Big[\eta_{y,\,i}(k)\,\eta_{y,\,j}(k)\Big] = \begin{cases} \sigma^2_{y,\,i} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\,,$$

$$\mathbb{E}\Big[\eta_{x,\,i}(k)\,\eta_{y,\,j}(k)\Big] = 0\,,$$

mit $\sigma^2_{x,\,i}$ & $\sigma^2_{y,\,i}$ als die Varianz jeder Komponente der Zufallsvariablen. Somit sind die Kovarianzmatrizen für die Zufallsvariablen, $\Sigma_{xx}(k+1) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_x(k+1)\,\boldsymbol{\eta}_x(k+1)^T\big]$ und $\Sigma_{yy}(k+1) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_y(k+1)\,\boldsymbol{\eta}_y(k+1)^T\big]$, diagonale und positiv definiten Matrizen, d.h., alle Eigenwerte sind reell und positiv.

Hauptidee des Kalman-Filters

Die Aufgabe des Kalman-Filters einer Dynamik ist, basierend auf einer vereinfachten aber unvollständigen Modellierung, aus dem gemessenen Ausgang einen guten Schätzwert für den Zustandsvektor zu rekonstruieren. Zur Notation: Die Schätzung des Zustandsvektors $\hat{\boldsymbol{x}}$ und des Ausgangsvektors $\hat{\boldsymbol{y}}$ werden mit dem Dach-Symbol markiert. Somit unterscheidet man zwischen der wahren Dynamik im System, welche nicht zugänglich ist, da sie durch Zufallsvariablen beschriebene unbekannte Effekte enthält, und dem vereinfachten Dynamik-Modell, womit die Schätzung gewonnen wird

wahre Dynamik:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big) + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_x(k+1)}_{\substack{\text{nichtmodellierte} \\ \text{Effekte}}}\,,$$

$$\boldsymbol{y}(k+1) = \boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k+1)\Big) + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_y(k+1)}_{\text{Sensorrauschen}}\,,$$

Schätzung mit Modell:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{f}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big)\,,$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(k+1) = \boldsymbol{h}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)\Big)\,. \tag{4}$$

Beim Kalman-Filter jedoch verwendet man **zwei** Schritte bei der Schätzung des Zustandsvektors, eine vorläufige und eine verbesserte Schätzung:

- Vorläufige oder *a-priori* Schätzung des Zustandsvektors beim nächsten Zeitschritt $\hat{\boldsymbol{x}}_{apri}(k+1) \equiv \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)$.
- Verbesserte oder *a-posteriori* Schätzung des Zustandsvektors beim nächsten Zeitschritt $\hat{\boldsymbol{x}}_{apos}(k+1) \equiv \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)$.

Die vorläufige *a-priori* Zustandsschätzung beim nächsten Zeitschritt wird aus der *a-posteriori* Zustandsschätzung beim aktuellen k-ten Zeitschritt unter ausschließlicher Verwendung des Modells gesch"atzt (analog für die Schätzung des Ausgangs)

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k) = \boldsymbol{f}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k), \boldsymbol{u}(k)\Big), \quad \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k) = \boldsymbol{h}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big), \tag{5}$$

Für die verbesserte *a-posteriori* Zustandsschätzung wird nun die Information über den gerade gemessenen neuen Ausgang $\boldsymbol{y}(k+1)$ dazu eingebaut, indem die vorläufige *a-priori* Zustandsschätzung durch eine Korrektur ergänzt wird

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1) = \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k) + \underbrace{\mathcal{K}(k+1)\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)}_{\text{Korrektur}}, \tag{6}$$

mittels einer noch nicht bestimmten $(n \times m)$-Gewichtungsmatrix $\mathcal{K}(k+1)$ (im Allgemeinen zeitabhängig), welche **Kalman-Matrix** genannt wird. Die Idee dahinter: Wenn das Modell gut genug ist, liefert die *a-priori* Schätzung sowohl für den Zustand wie für den Ausgang recht gute Werte, so dass sich der wahre Ausgang $\boldsymbol{y}(k+1)$ im nächsten Zeitschritt von dem *a-priori* geschätzten Ausgang $\hat{\boldsymbol{y}}(k+1)$ kaum unterscheidet und daher die vorläufige Zustandsschätzung völlig ausreicht: $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1) \approx \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)$. Wenn jedoch das verwendete Modell teilweise relevante Effekte nicht mitberücksichtigt, und somit $\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)$ nicht mehr klein ist, wird die vorläufige Zustandsschätzung durch die Korrektur $\mathcal{K}(k+1)\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)$ in eine verbesserte Zustandsschätzung ergänzt, vorausgesetzt die Kalman-Matrix $\mathcal{K}(k+1)$ ist passend gewählt worden.

Diese geeignete Wahl ist was dem Kalman-Filter ausmacht. Dafür wird versucht den Fehler der verbesserten Schätzung im neuen $(k+1)$-ten Zeitschritt, d.h. den Unterschied zwischen dem wahren und dem *a-posteriori* geschätzten Zustand

$$\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)$$

minimal zu halten. Da der wahre neue Zustand $\boldsymbol{x}$ nicht zugänglich ist (wegen des Zufallscharakters) muss man sich mit der *a-posteriori* Fehlerkovarianz-Matrix im Zustand (d.h. mit Erwartungswerten) begnügen

$$P_{xx}(k+1|k+1) = \mathbb{E}\Big[\ \Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)\Big)\ \Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)\Big)^T\ \Big].$$

Die Kalman-Matrix wird konkret aus der Minimierung dieser letzteren Fehlerkovarianzmatrix gewonnen, als $\dfrac{\partial P_{xx}(k+1|k+1)}{\partial \mathcal{K}(k+1)^T} = 0$.

Das lineare Kalman-Filter (LKF)

Als erstes wird der lineare Fall betrachtet. Für einen zeitabhängigen n-dimensionalen Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, welcher die zeitliche Entwicklung in den Freiheitsgraden der Dynamik beschreibt, und einen zeitabhängigen m-dimensionalen Inputvektor $\boldsymbol{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ sei folgende zeitdiskrete lineare Modellierung der Dynamik zusammen mit Messausgang gegeben

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) &= A_d\,\boldsymbol{x}(k) + B_d\,\boldsymbol{u}(k) + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_x(k+1)}_{\substack{\text{nichtmodellierte}\\ \text{Effekte}}} \\ \boldsymbol{y}(k+1) &= C_d\,\boldsymbol{x}(k+1) + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_y(k+1)}_{\text{Sensorrauschen}} \end{cases} \tag{7}$$

mit zeitkonstanten Matrizen A_d, B_d und C_d.

1. Aufgabe. Bearbeiten Sie schriftlich folgende Teilaufgaben für das lineare Kalman-Filter (immer mit Begründung, Hilfe dazu in [1]):

- Vorausgesetzt die *a-posteriori* Fehlerkovarianzmatrix des Zustandsvektors im aktuellen k-ten Zeitschritt als $P_{xx}(k|k)$ bekannt [1] ist, beweisen Sie folgende Beziehung für die vorläufige *a-priori* Fehlerkovarianzmatrix des Zustandsvektors im nächsten Zeitschritt $(k+1)$

$$\begin{aligned} P_{xx}(k+1|k) &= \mathbb{E}\Big[\,\Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big)\,\Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big)^T\,\Big] \\ &= A_d\,P_{xx}(k|k)\,A_d^T + \Sigma_{xx}(k+1)\,, \end{aligned} \tag{8}$$

  wobei $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)$ die mittels des Modells berechnete Zustandsschätzung beim nächsten, $(k+1)$-ten Zeitschritt ist, $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k) = A_d\,\hat{\boldsymbol{x}}(k|k) + B_d\,\boldsymbol{u}(k)$, und $\Sigma_{xx}(k+1) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_x(k+1)\,\boldsymbol{\eta}_x(k+1)^T\big]$ die Kovarianzmatrix der normalverteilten Zufallsvariablen im Zustand beim nächsten Zeitschritt darstellt.

- Warum ist diese Matrix $P_{xx}(k+1|k)$ eine symmetrische und quadratische Matrix? Warum ist diese Matrix positiv definit?

- Warum gibt es in (8) keinen Term, der linear aus $\boldsymbol{\eta}_x(k+1)$ stammt?

[1] Beim ersten Zeitschritt wird $P_{xx}(k|k)$ mit einer symmetrischen, quadratischen und positiv definiten Matrix initialisiert. Die Eigenschaft "positiv definite" Matrix A bedeutet dass alle Eigenwerte der Matrix A positiv sind, oder äquivalent dazu, dass wenn die Matrix von links und von rechts mit dem gleichen (beliebigen) nichtverschwindenden Vektor $\boldsymbol{v}$ multipliziert wird, $\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}$, das Ergebnis eine positive Zahl ist.

- Analog zu (8) beweisen Sie folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} P_{xy}(k+1|k) &= \mathbb{E}\Big[\Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big) \Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)^T \Big] \\ &= P_{xx}(k+1|k)\, C_d^T \,, \\ P_{yy}(k+1|k) &= \mathbb{E}\Big[\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big) \Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)^T \Big] \\ &= C_d\, P_{xx}(k+1|k)\, C_d^T + \Sigma_{yy}(k+1)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

  wobei $\hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)$ die mittels des Modells berechnete Ausgangsschätzung beim nächsten, $(k+1)$-ten Zeitschritt ist, $\hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k) = C_d\, \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)$, und dazu $\Sigma_{yy}(k+1) = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_y(k+1)\, \boldsymbol{\eta}_y(k+1)^T\big]$ die Kovarianzmatrix der normalverteilten Zufallsvariablen im Ausgang beim nächsten Zeitschritt darstellt. Die Matrix $P_{xy}(k+1|k)$ ist nicht quadratisch aber die Matrix $P_{yy}(k+1|k)$ ist wie $P_{xx}(k+1|k)$ quadratisch, symmetrisch und positiv definit.

- Warum gibt es in (9) keinen Term, der linear aus $\boldsymbol{\eta}_y(k+1)$ stammt?

- Aus dem verbesserten *a-posteriori* Zustandsschätzung beim nächsten Zeitschritt, $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1) = \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k) + \mathcal{K}(k+1)\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)$, beweisen Sie folgende Beziehung für die *a-posteriori* Fehlerkovarianzmatrix des Zustandsvektors

$$\begin{aligned} P_{xx}(k+1|k+1) &= \mathbb{E}\Big[\Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)\Big) \Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)\Big)^T\Big] \\ &= P_{xx}(k+1|k) - \mathcal{K}(k+1)\, P_{xy}(k+1|k)^T - P_{xy}(k+1|k)\, \mathcal{K}(k+1)^T \\ &\quad + \mathcal{K}(k+1)\, P_{yy}(k+1|k)\, \mathcal{K}(k+1)^T \,. \end{aligned} \tag{10}$$

- Warum ist diese Matrix $P_{xx}(k+1|k+1)$ eine symmetrische und quadratische Matrix? Warum ist diese Matrix positiv definit?

2. Aufgabe. Die Kalman-Matrix $\mathcal{K}$, im Allgemeinen zeitabhängig $\mathcal{K}(k+1)$, ist bis jetzt frei gehalten worden. Diese wird nun verwendet, damit die *a-posteriori* Zustands-Fehlerkovarianzmatrix $P_{xx}(k+1|k+1)$ minimiert [2] wird, also ein **Optimierungsproblem** lösen. Zeigen Sie, dass die mathematische Formulierung für dieses Optimum $\dfrac{\partial P_{xx}(k+1|k+1)}{\partial \mathcal{K}(k+1)^T} = 0$ zu folgenden Beziehungen führt

$$\mathcal{K}(k+1) = P_{xy}(k+1|k)\Big(P_{yy}(k+1|k)\Big)^{-1}, \tag{11}$$

optimales $P_{xx}(k+1|k+1) = P_{xx}(k+1|k) - \mathcal{K}(k+1)\, P_{xy}(k+1|k)^T \,,$ (12)

[2] Die *a-priori* Zustands-Fehlerkovarianzmatrix $P_{xx}(k+1|k)$ ist unabhängig von $\mathcal{K}(k+1)$ und kann somit nicht nach $\mathcal{K}$ minimiert werden.

wobei in die letzte Gleichung das Ergebnis aus der ersten Gleichung (11) für das optimale Kalman-Matrix $\mathcal{K}(k+1)$ eingesetzt worden ist. Die *a-posteriori* Schätzung des Zustandsvektors beim nächsten Zeitschritt $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)$, welche die verbesserte Rekonstruktion des unbekannten, wahren Zustandsvektors $\boldsymbol{x}(k+1)$ liefert, gewinnt man aus der bereits berechneten *a-priori* Schätzung des Zustands beim nächsten Zeitschritt und aus dem gerade erhaltenen, neuen Messausgang $\boldsymbol{y}(k+1)$

$$\text{optimales } \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1) = \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k) + \mathcal{K}(k+1)\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)\,. \tag{13}$$

Es ist wichtig zu merken, dass die Berechnungen der *a-posteriori* Variablen modellfrei sind und somit auch für den Fall einer nichtlinearen Dynamik gelten.

Die Zusammenfassung des linearen Kalman-Filters (LKF) befindet sich in Tabelle 1.

verrauschte lineare Dynamik & Ausgang	$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ $m < n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ $\boldsymbol{x}(k+1) = \overbrace{A_d\,\boldsymbol{x}(k) + B_d\,\boldsymbol{u}(k)}^{\text{Modell}} + \overbrace{\boldsymbol{\eta}_x(k+1)}^{\text{Rauschen}}$ $\boldsymbol{y}(k+1) = \underbrace{C_d\,\boldsymbol{x}(k+1)}_{\text{Modell}} + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_y(k+1)}_{\text{Rauschen}}$
bekannt zu jeder Zeit	Kovarianzmatrizen $\Sigma_{xx} = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_x\,\boldsymbol{\eta}_x^T\big]$ & $\Sigma_{yy} = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_y\,\boldsymbol{\eta}_y^T\big]$ der normalverteilten Zufallsvariablen (Rauschen)
gegeben beim aktuellen k-ten Zeitschritt	*a-posteriori* Zustandsschätzung $\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k)$ & Zustands-Fehlerkovarianzmatrix $P_{xx}(k\|k)$
a-priori beim nächsten $(k+1)$-ten Zeitschritt, nur mit Modell	$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k) = A_d\,\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k) + B_d\,\boldsymbol{u}(k)$ $\hat{\boldsymbol{y}}(k+1\|k) = C_d\,\hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k)$ $P_{xx}(k+1\|k) = A_d\,P_{xx}(k\|k)\,A_d^T + \Sigma_{xx}(k+1)$ $P_{xy}(k+1\|k) = P_{xx}(k+1\|k)\,C_d^T$ $P_{yy}(k+1\|k) = C_d\,P_{xx}(k+1\|k)\,C_d^T + \Sigma_{yy}(k+1)$
a-posteriori beim nächsten $(k+1)$-ten Zeitschritt, mit wahrem $\boldsymbol{y}(k+1)$	$\mathcal{K}(k+1) = P_{xy}(k+1\|k)\Big(P_{yy}(k+1\|k)\Big)^{-1}$ $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k+1) = \hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k) + \mathcal{K}(k+1)\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1\|k)\Big)$ $P_{xx}(k+1\|k+1) = P_{xx}(k+1\|k) - \mathcal{K}(k+1)\,P_{xy}(k+1\|k)^T$

Tab. 1: Lineares Kalman-Filter (LKF)

Wichtig: Von nun an werden sowohl die $n \times n$-Kovarianzmatrix $\Sigma_{xx}(k+1)$ wie die $m \times m$-Kovarianzmatrix $\Sigma_{yy}(k+1)$ als diagonal und zeitunabhängig angenommen (letzteres bedeutet: ohne jegliche Abhängigkeit vom zeitdiskreten Index k).

3. Aufgabe. Untersucht wird nun ein kleiner DC-Motor, dessen elektrische Seite vereinfacht durch die Schaltung in Abb. 1 gegeben wird. Wenn der Motor eine Drehgeschwindigkeit ω_R erzeugt, wird eine Spannung $v_M = K_e\,\omega_R$ am Motor verbraucht, welche durch den Motor-Strom i sichergestellt wird. Dieser Strom wird durch eine Spannungsquelle gesteuert, welche eine zeitabhängige Spannung u (grün darsgestellt) generiert; R und L beschreiben den elektrischen Widerstand und die

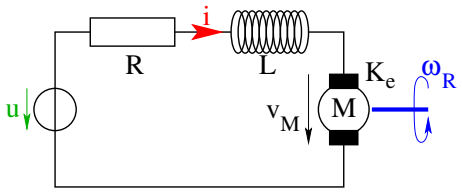

Abb. 1: Elektrische Schaltung für vereinfachte Modellierung eines DC-Motors

Induktivität der Stator-Spulen im Motor. Der Strom i erzeugt auf der mechanischen Seite ein elektrisches Drehmoment $T_e = K_t\, i$, welches ein mechanisches Lastdrehmoment T_m bedienen soll (z.B. ein Gewicht anheben), so dass die Veränderung der Drehgeschwindigkeit ω_R durch das folgende Newtonsche Gesetz beschrieben wird

$$J\frac{d\omega_R}{dt} = \underbrace{K_t\, i}_{\substack{\text{elektrisch erzeugtes}\\ \text{Drehmoment}}} - \overbrace{T_m}^{\substack{\text{mechanisches}\\ \text{Lastdrehmoment}}} - \underbrace{b\,\omega_R}_{\text{Reibung}},$$

wobei J das Trägheitsmoment der Rotormasse im Motor darstellt. Die gesamte Dynamik wird beschrieben durch folgende drei lineare Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_R}{dt} & = \omega_R \\ J\dfrac{d\omega_R}{dt} & = K_t\, i - T_m - b\,\omega_R \\ R\, i + L\dfrac{di}{dt} + K_e\,\omega_R & = u \end{cases} \tag{14}$$

oder in Matrix-Form für einen Zustandsvektor $\begin{pmatrix} x_1 = \theta_R \\ x_2 = \omega_R \\ x_3 = i \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ T_m \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Gemessen wird nur der Rotorwinkel θ_R: $y = y_1 = x_1$. Aus den Differentialgleichungen (15) für einen Zeitschritt von Dauer $\Delta t = 10^{-3}$ s und für die Motor-Parameter $R = 1$ Ohm, $L = 2 \times 10^{-3}$ H, $K_e = K_t = 5 \times 10^{-2}$ Nm/A, $J = 10^{-4}$ kg m^2 und $b = 10^{-5}$ kg m^2/s ergibt sich folgende zeitdiskrete lineare Dynamik

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.0010 & 0.0002 \\ 0 & 0.9946 & 0.3926 \\ 0 & -0.0196 & 0.6020 \end{pmatrix}}_{A_d}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -0.0050 \\ 0.1064 & -9.9810 \\ 0.3927 & 0.1064 \end{pmatrix}}_{B_d}\begin{pmatrix} u(k) \\ T_m(k) \end{pmatrix},$$

$$y_1(k+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C_d}\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = x_1(k+1)\,. \tag{16}$$

Lösen Sie nun folgende Programmieraufgaben:

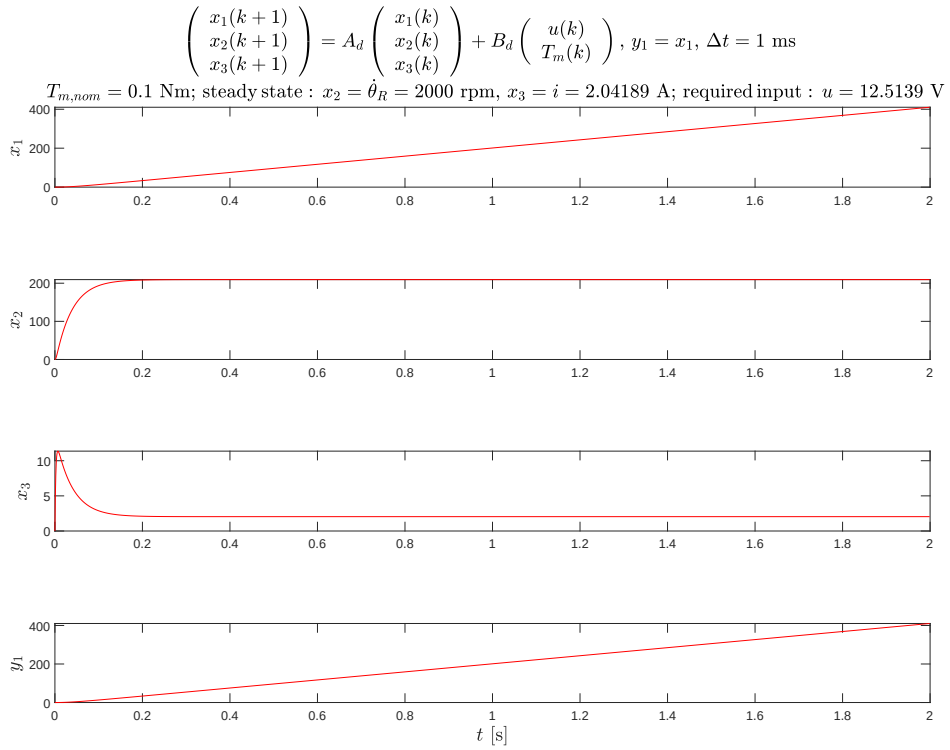

Abb. 2: Dynamik des idealen (ohne Rauschen) DC-Motors

- Bei einem konstanten mechanischen Lastdrehmoment T_m wird der Zustand mit konstanter Drehgeschwindigkeit ω_R und konstantem Strom i als eingeschwungener Zustand (oder *steady state*) bezeichnet. Zeigen Sie aus den Differentialgleichungen (14), dass bei einem konstanten T_m und einer gewünschten konstanten Drehgeschwindigkeit ω_R der resultierende Strom und die dafür notwendige Eingangsspannung durch folgende Gleichungen gegeben sind

$$i = \frac{1}{K_t}\, T_m + \frac{b}{K_t}\, \omega_R\,, \qquad u = \frac{R}{K_t}\, T_m + \left(K_e + \frac{Rb}{K_t} \right) \omega_R\,.$$

  Berechnen Sie u und i für $T_m = 0.1$ Nm und $\omega_R = 209.44$ rad/s $= 2000$ rpm.

- Der Motor wird bei dem konstanten Last $T_m = 0.1$ Nm betrieben und soll sich bei der gewünschten Drehgeschwindigkeit von $\omega_R = 2000$ rpm nach kurzer Zeit einstellen, wobei die ganze Zeit mit der konstanten Eingangsspannung u aus der letzten Teilaufgaben betrieben wird.

  Zunächst ohne Rauschen und bei einer Zeitschrittdauer von $\Delta t = 10^{-3}$ s verfolgen Sie die Dynamik (16) über 2 Sekunden und reproduzieren Sie mit MATLAB die Ergebnisse in der Abb. 2; der Anfangzustand lautet $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Merken Sie, dass der Motor-Strom x_3 schnell auf über 10 A steigt, bevor er sich auf den niedrigeren eingeschwungenen Wert einstellt.

- Die vorherige Modellierung ist jedoch unvollständig und zusätzliche Effekte kommen noch hinzu, welche durch normalverteilte Zusfallsvariablen $\boldsymbol{\eta}_x$ & $\boldsymbol{\eta}_y$ beschrieben werden, mit gleicher Varianz $\sigma_x^2 = 0.2^2$ bei den drei Komponenten des Zustandsvektors und $\sigma_y^2 = 0.1^2$ bei der einzigen Komponente im Ausgang.

  Programmieren Sie in MATLAB das lineare Kalman-Filter (LKF), wobei die *a-posteriori* Fehlerkovarianzmatrix des Zustandsvektors $P_{xx}(k=0|k=0)$ mit `0.1*eye(3)` initialisiert wird. Vergleichen Sie in 3 getrennten Plots die zeitliche Entwicklung jeder der 3 wahren Zustandskomponenten (nicht zugänglich für das Kalman-Filter) mit den vom LKF geschätzten 3 Zustandskomponenten. Begründen Sie kurz, ob das LKF seine Aufgabe erfüllt hat.

  Hilfe: Die MATLAB-Funktion `randn(3,1)` generiert einen 3-komponentigen Spaltenvektor an normalverteilten (Pseudo-)Zufallszahlen mit Mittelwert 0 und Varianz 1, so dass `sigma*randn(3,1)` einen 3-komponentigen Spaltenvektor an normalverteilten Zufallszahlen generiert, mit gleicher Varianz σ^2 an allen 3 Komponenten.

Das erweiterte Kalman-Filter (EKF)

Wenn die zeitdiskrete Dynamik nicht mehr linear ist sondern durch die nichtlinearen Funktionen

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \underbrace{\boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)\Big)}_{\text{Modell}} + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_x(k+1)}_{\substack{\text{nichtmodellierte}\\ \text{Effekte}}}, \quad \boldsymbol{y}(k+1) = \underbrace{\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k+1)\Big)}_{\text{Modell}} + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_y(k+1)}_{\text{Sensorrauschen}},$$

können die Erwartungswerte in den vorläufigen *a-priori* Fehlerkovarianzmatrizen nicht mehr exakt berechnet werden, z.B.

$$\begin{aligned} P_{xx}(k+1|k) &= \mathbb{E}\Big[\Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big)\Big(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big)^T\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\Big(\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k),\dots\big) - \boldsymbol{f}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k),\dots\big)\Big)\Big(\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k),\dots\big) - \boldsymbol{f}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k),\dots\big)\Big)^T\Big] \\ &= ? \end{aligned}$$

Beim erweiterten Kalman-Filter (EKF) wird diese Schwierigkeit angenähert gelöst, indem die Taylor-Reihenentwicklung von $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k),\dots\big) - \boldsymbol{f}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k),\dots\big)$ bis zum linearen Term $\Big(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(k|k)\Big)$ durchgeführt wird (jedoch aber nicht höhere Potenzen berücksichtigt)

$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k),\dots\big) = \boldsymbol{f}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k),\dots\big) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)} \Big(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(k|k)\Big) + \dots,$$

$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k),\dots\big) - \boldsymbol{f}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k),\dots\big) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)} \Big(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(k|k)\Big) + \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{nicht berücksichtigt}}, \tag{17}$$

und analog für $P_{xy}(k+1|k)$ und $P_{yy}(k+1|k)$. Wie bereits bei **2. Aufgabe** bemerkt, bleiben die Berechnungen im *a-posteriori* Schritt jedoch wie beim linearen Kalman-Filter. Die Zusammenfassung des erweiterten Kalman-Filters (EKF) befindet sich in Tabelle 2.

verrauschte nichtlineare Dynamik & Ausgang	$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m\ m < n,\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p \\ \boldsymbol{x}(k+1) = \overbrace{\boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big)}^{\text{Modell}} + \overbrace{\boldsymbol{\eta}_x(k+1)}^{\text{Rauschen}} \\ \boldsymbol{y}(k+1) = \underbrace{\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k)\Big)}_{\text{Modell}} + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_y(k+1)}_{\text{Rauschen}} \end{array} \right.$
bekannt zu jeder Zeit	Kovarianzmatrizen $\Sigma_{xx} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}_x\, \boldsymbol{\eta}_x^T]$ & $\Sigma_{yy} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}_y\, \boldsymbol{\eta}_y^T]$ der normalverteilten Zufallsvariablen (Rauschen)
gegeben beim aktuellen k-ten Zeitschritt	*a-posteriori* Zustandsschätzung $\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k)$ & Zustands-Fehlerkovarianzmatrix $P_{xx}(k\|k)$
a-priori beim nächsten $(k+1)$-ten Zeitschritt, nur mit Modell	$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k) & = \boldsymbol{f}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k), \boldsymbol{u}(k)\big) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(k+1\|k) & = \boldsymbol{h}\big(\hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k)\big) \\ P_{xx}(k+1\|k) & = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k)} P_{xx}(k\|k) \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k)} + \Sigma_{xx}(k+1) \\ P_{xy}(k+1\|k) & = P_{xx}(k+1\|k) \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k)} \\ P_{yy}(k+1\|k) & = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k)} P_{xx}(k+1\|k) \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k\|k)} + \Sigma_{yy}(k+1) \end{array} \right.$
a-posteriori beim nächsten $(k+1)$-ten Zeitschritt, mit wahrem $\boldsymbol{y}(k+1)$	$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{K}(k+1) & = P_{xy}(k+1\|k)\Big(P_{yy}(k+1\|k)\Big)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k+1) & = \hat{\boldsymbol{x}}(k+1\|k) + \mathcal{K}(k+1)\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1\|k)\Big) \\ P_{xx}(k+1\|k+1) & = P_{xx}(k+1\|k) - \mathcal{K}(k+1)\, P_{xy}(k+1\|k)^T \end{array} \right.$

Tab. 2: Erweitertes Kalman-Filter (EKF)

4. Aufgabe. Sei nun eine autonome (=kein Eingang $\boldsymbol{u}$) nichtlineare zeitdiskrete Dynamik, modelliert durch folgende algebraische Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ a\Big(2 + \cos(x_1(k))\Big)\Big(x_2(k) + x_3(k)\Big) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$y_1(k+1) = x_2(k+1)\,,$$

mit Parameter $a = 0.1$. Diese Modellierung ist jedoch unvollständig und zusätzliche Effekte kommen noch hinzu, welche durch normalverteilte Zusfallsvariablen $\boldsymbol{\eta}_x$ & $\boldsymbol{\eta}_y$ beschrieben werden, mit gleicher Varianz $\sigma_x^2 = 0.2^2$ bei den drei Komponenten des Zustandsvektors und $\sigma_y^2 = 0.1^2$ bei der einzigen Komponente im Ausgang.

Schreiben Sie zuerst eine eigene MATLAB-Funktion `ekf.m`

```
function [x_apos, Pxx_apos] = ekf(fdyn, hout, dfdyn, dhout, x_prev, y_new, Pxx_prev, Sxx, Syy)
```

zur Implementierung des erweiterten Kalman-Filters (EKF). Eingabe in `ekf()` sind:

- Die Funktionen $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ zur Beschreibung der zeitdiskreten Dynamik und $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ für den Messausgang, beide definiert als anonyme Funktionen `fdyn` und `hout`, und ihre jeweiligen Jacobi-Matrizen $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$ und $\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}$, auch als anonyme Funktionen `dfdyn` und `dhout`.

  Hilfe: Bei der Dynamik (18) lautet die anonyme Funktion für die zeitdiskrete Dynamik
  `fdyn = @(x) [ x(2); x(3); a*(2+cos(x(1)))*(x(2)+x(3)) ];`

- Der aktuelle *a-posteriori* geschätzten Zustand $\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)$ als `x_prev`.

- Der neue, gerade erhaltene, Messausgang $\boldsymbol{y}(k+1)$ als `y_new`.

- Die *a-posteriori* Fehlerkovarianzmatrix des Zustandsvektors $P_{xx}(k|k)$ beim aktuellen k-ten Zeitschritt als `Pxx_prev`.

- Die (angenommen zeitunabhängigen) Kovarianzmatrizen der normalverteilten Zufallsvariablen $\boldsymbol{\eta}_x$ & $\boldsymbol{\eta}_y$ als `Sxx` & `Syy`.

Ausgabe aus `ekf()` sind:

- Die *a-posteriori* Zustandsschätzung beim nächsten Zeitschritt $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1)$ als `x_apos`.

- Die resultierende *a-posteriori* Zustands-Fehlerkovarianzmatrix $P_{xx}(k+1|k+1)$ beim nächsten Zeitschritt als `Pxx_apos`.

Mittels eines selbstprogrammierten MATLAB-Codes wird über eine gesamte Dauer von $5\ \mathrm{s}$ die Evolution des wahren (aber verrauschten) und des geschätzten Zustandsvektors für die Dynamik (18) verfolgt. Die Dauer eines Zeitschritts beträgt $\Delta t = 0.1\ \mathrm{s}$. Dabei wird die *a-posteriori* Fehlerkovarianzmatrix des Zustandsvektors $P_{xx}(k=0|k=0)$ mit `0.1*eye(3)` initialisiert.

Vergleichen Sie in 3 getrennten Plots die zeitliche Entwicklung jeder der 3 wahren Zustandskomponenten (nicht zugänglich für das Kalman-Filter) mit den vom EKF geschätzten 3 Zustandskomponenten.

Das geruchlose Kalman-Filter (UKF)

Die Genauigkeit des erweiterten Kalman-Filters kann erhöht werden, indem bei den *a-priori* Berechnungen die Taylor-Reihenentwicklung in (17) bis zur quadratischen Ordnung erweitert wird, was jedoch einen recht hohen Aufwand an zweiten Ableitungen der nichtlinearen Funktionen erfordert.

Eine kluge Alternative ist die von Julier & Uhlmann entwickelte geruchlose Transformation (*unscented transformation*). Sei $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Vektor, welcher im Bezug auf einen Referenzvektor $\boldsymbol{z}_{ref}$ eine Streuung aufweist, letztere durch eine vorgegebene symmetrische und positiv definite Fehlerkovarianzma-

trix $P_{zz} = \mathbb{E}\big[\,(\boldsymbol{z}_{ref} - \boldsymbol{z})\,(\boldsymbol{z}_{ref} - \boldsymbol{z})^T\,\big]$ beschrieben, welche den fehlenden Kenntnisstand charakterisiert. Nun soll dieser Vektor $\boldsymbol{z}$ durch eine nichtlineare Vektorfunktion $\boldsymbol{g}$ transformiert und anschließend die Fehlerkovarianzmatrix der Transformationen berechnet werden. Indem zusätzliche $2n$ Kopien von $\boldsymbol{z}$ (2 Kopien pro Dimension) mit einer geschickt gewählten Entfernung von $\boldsymbol{z}$ generiert werden, plus entsprechende Gewichte für jede dieser Kopien, kann ein Erwartungswert durch eine gewichtete Summe ersetzt werden. Solche Gewichte in Abhängigkeit von β werden so definiert, dass die Taylor-Reihenentwicklung in der Fehlerkovariantmatrix der Transformationen mindestens bis (inklusiv) quadratischer Ordnung in $(\boldsymbol{z}_{ref} - \boldsymbol{z})$ genau wiedergeben wird. Diese Kopien werden **Sigma-Punkte** genannt.

Nun die mathematische Implementierung dieser Idee: Nach der Einführung des kleinen positiven Parameters $\gamma \ll 1$ werden die $2n+1$ Sigma-Punkte für $\boldsymbol{z}$ und die dazugehörigen Gewichte folgenderweise definiert

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a=0)} = \boldsymbol{z} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a=1,\ldots,n)} & = \boldsymbol{z} + \gamma\sqrt{n}\left(\sqrt{P_{zz}}\right)_{|\text{Spalte (:,j)}} \quad j = 1,\ldots,n \\ \boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a=n+1,\ldots,2n)} & = \boldsymbol{z} - \gamma\sqrt{n}\left(\sqrt{P_{zz}}\right)_{|\text{Spalte (:,j)}} \quad j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

$$\mathcal{W}_{av}^{(a=0)} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\,, \quad \mathcal{W}_{co}^{(a=0)} = -\frac{\left(\gamma^2 - 1\right)^2}{\gamma^2} + \beta\,, \quad \mathcal{W}_{av}^{(a=1,\ldots,2n)} = \mathcal{W}_{co}^{(a=1,\ldots,2n)} = \frac{1}{2n\gamma^2}$$

wobei $\left(\sqrt{P_{zz}}\right)_{|\text{Spalte (:,j)}}$ die j-te Spalte der Matrix $\sqrt{P_{zz}}$ bezeichnet; Parameter β wird später kurz diskutiert. Die Transformation vom Vektor $\boldsymbol{z}$ und seiner Fehlerkovarianzmatrix P_{zz} durch die nichtlineare Funktion $\boldsymbol{g}$ ist approximiert durch

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_{trans} & \overset{\text{def}}{\approx} \sum_{a=0}^{a=2n} \mathcal{W}_{av}^{(a)}\, \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) \\ P_{zz,trans} & \overset{\text{def}}{\approx} \sum_{a=0}^{a=2n} \mathcal{W}_{co}^{(a)} \Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) - \boldsymbol{z}_{trans}\Big)\Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) - \boldsymbol{z}_{trans}\Big)^T \end{cases} \tag{19}$$

Das geruschlose Kalman-Filter (UKF) verwendet die geruchlose Transformation für die *a-priori* Schätzung sowohl des Zustandsvektors (mit nichtlinearer Vektorfunktion $\boldsymbol{f}$) wie des Ausgangsvektors (mit nichtlinearer Vektorfunktion $\boldsymbol{h}$). Daraus werden die 3 notwendigen *a-priori* Fehlerkovarianzmatrizen $P_{xx}(k+1|k)$, $P_{xy}(k+1|k)$ & $P_{yy}(k+1|k)$ gut angenähert. Aufgrund des Aufbaus der geruchlosen Transformation wird bei den *a-priori* Berechnungen eine höhere Genauigkeit als beim erweiterten Kalman-Filter erreicht. Die *a-posteriori* Berechnungen bleiben genau so wie beim linearen Kalman-Filter. Weitere Details können aus dem Anhang oder aus der Referenz [2] entnommen werden. Die Zusammenfassung des geruchlosen Kalman-Filters (UKF) befindet sich in Tabelle 3.

5. Aufgabe. Es wird weiter mit der nichtlinearen, zeitdiskreten Dynamik aus (18) gearbeitet.

Machen Sie sich mit der MATLAB-Funktion `sqrtm()` für die Würzelmatrix einer positiv definiten, symmetrischen Matrix vertraut. Dies wird für die Berechnung der Sigma-Punkte benötigt. Schreiben Sie eine eigene MATLAB-Funktion

verrauschte nichtlineare Dynamik & Ausgang

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m\ m < n,\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p \\ \boldsymbol{x}(k+1) = \overbrace{\boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\Big)}^{\text{Modell}} + \overbrace{\boldsymbol{\eta}_x(k+1)}^{\text{Rauschen}} \\ \boldsymbol{y}(k+1) = \underbrace{\boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{x}(k)\Big)}_{\text{Modell}} + \underbrace{\boldsymbol{\eta}_y(k+1)}_{\text{Rauschen}} \end{cases}$$

bekannt zu jeder Zeit: Kovarianzmatrizen $\Sigma_{xx} = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_x\, \boldsymbol{\eta}_x^T\big]$ & $\Sigma_{yy} = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}_y\, \boldsymbol{\eta}_y^T\big]$ der normalverteilten Zufallsvariablen (Rauschen)

gegeben beim aktuellen k-ten Zeitschritt: *a-posteriori* Zustandsschätzung $\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)$ & Zustands-Fehlerkovarianzmatrix $P_{xx}(k|k)$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \text{Parameter } 0 < \gamma < 1 \text{ und Gewichte:} \\ \mathcal{W}_{av}^{(a=0)} = \dfrac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2},\ \mathcal{W}_{co}^{(a=0)} = -\dfrac{\left(\gamma^2 - 1\right)^2}{\gamma^2} + \beta,\ \mathcal{W}_{av/co}^{(a=1,\ldots,2n)} = \dfrac{1}{2n\gamma^2} \\ \text{Berechnung der } (2n+1) \text{ Sigma-Punkte } \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a=0,1,\ldots,2n)}(k|k): \\ \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k|k) = \Big[\hat{\boldsymbol{x}}(k|k),\ \hat{\boldsymbol{x}}(k|k) \pm \gamma\sqrt{n}\,\sqrt{P_{xx}(k|k)}_{\text{Spalte (:,j)}}\Big] \\ \text{mit } j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

a-priori beim nächsten $(k+1)$-ten Zeitschritt, nur mit Modell

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k+1|k) = \boldsymbol{f}\Big(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k|k), \boldsymbol{u}(k)\Big) \text{ (transf. Sigma-Punkte für Zustand)} \\ \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(a)}(k+1|k) = \boldsymbol{h}\Big(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k+1|k)\Big) \text{ (transf. Sigma-Punkte für Ausgang)} \\ \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k) = \displaystyle\sum_{a=0}^{2n} \mathcal{W}_{av}^{(a)}\, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k+1|k) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k) = \displaystyle\sum_{a=0}^{2n} \mathcal{W}_{av}^{(a)}\, \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(a)}(k+1|k) \\ P_{xx}(k+1|k) = \displaystyle\sum_{a=0}^{2n} \mathcal{W}_{co}^{(a)} \Big(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big)\Big(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big)^T \\ \qquad + \Sigma_{xx}(k+1) \\ P_{xy}(k+1|k) = \displaystyle\sum_{a=0}^{2n} \mathcal{W}_{co}^{(a)} \Big(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(a)}(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)\Big)\Big(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(a)}(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)^T \\ P_{yy}(k+1|k) = \displaystyle\sum_{a=0}^{2n} \mathcal{W}_{co}^{(a)} \Big(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(a)}(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)\Big(\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{(a)}(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big)^T \\ \qquad + \Sigma_{yy}(k+1) \end{cases}$$

a-posteriori beim nächsten $(k+1)$-ten Zeitschritt, mit wahrem $\boldsymbol{y}(k+1)$

$$\begin{cases} \mathcal{K}(k+1) = P_{xy}(k+1|k)\Big(P_{yy}(k+1|k)\Big)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k+1) = \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k) + \mathcal{K}(k+1)\Big(\boldsymbol{y}(k+1) - \hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)\Big) \\ P_{xx}(k+1|k+1) = P_{xx}(k+1|k) - \mathcal{K}(k+1)\, P_{xy}(k+1|k)^T \end{cases}$$

Tab. 3: Geruchloses Kalman-Filter (UKF)

`unsce_trafo()`

```
[Z_trans, z_trans] = unsce_trafo(g, Z, Wav, ng)
```

für die geruchlose Transformation. Eingabe in `unsce_trafo()` sind:

- Die nichtlineare Vektorfunktion $\boldsymbol{g}$ als anonyme Funktion `g`.
- Die Sigma-Punkten $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}$ spaltenweise angeordnet als Matrix `Z`.
- Die vorher berechneten Gewichte $\mathcal{W}_{av}^{(a)}$ als `Wav`.

- Die Anzahl `ng` an Komponenten bei der Ausgabe der nichtlinearen Funktion $\boldsymbol{g}$.

Ausgabe aus `unsce_trafo()` sind

- Die transformierten Sigma-Punkten $\boldsymbol{g}\Big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\Big)$ spaltenweise angeordnet als Matrix `Z_trans`.
- Der resultierende Vektor $\boldsymbol{z}_{trans} = \sum_{a=0}^{a=2n} \mathcal{W}_{av}^{(a)}\, \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big)$ als `z_trans`.

Hilfe: Für einen Spaltenvektor `v` kann in MATLAB mittels `v(:,ones(1,5))` eine Matrix mit 5 Spalten generiert werden, wo der Spaltenvektor `v` 5-mal nacheinander wiederholt steht. Damit können einfach Sigma-Punkte formuliert werden.

Schreiben Sie anschließend eine eigene MATLAB-Funktion `ukf.m`

```
function [x_apos, Pxx_apos] = ukf(fdyn, hout, x_prev, y_new, Pxx_prev, Sxx, Syy)
```

zur Implementierung des geruchlosen Kalman-Filters (UKF). Die Eingaben und Ausgaben sind analog zur Funktion `ekf()` aus der vorherigen **4. Aufgabe**, wobei diesmal keine Jacobi-Matrix mehr benötigt wird. Eine gängige Wahl der Parameter für die geruchlose Transformation ist $\gamma = 10^{-3}$ und $\beta = 2$.

Analog zur **4. Aufgabe** wird über eine gesamte Dauer von $5\ \mathrm{s}$ die Evolution des wahren (aber verrauschten) und des geschätzten Zustandsvektors für die Dynamik (18) verfolgt. Die Dauer eines Zeitschritts beträgt $\Delta t = 0.1\ \mathrm{s}$. Dabei wird die *a-posteriori* Fehlerkovarianzmatrix des Zustandsvektors $P_{xx}(k=0|k=0)$ mit `0.1*eye(3)` initialisiert.

Vergleichen Sie in 3 getrennten Plots die zeitliche Entwicklung jeder der 3 wahren Zustandskomponenten (nicht zugänglich für das Kalman-Filter) mit den vom UKF geschätzten 3 Zustandskomponenten.

Aus dem Vergleich zwischem dem EKF (Aufgabe 4) und dem UKF (Aufgabe 5) begründen Sie kurz, welches dieser zwei Kalman-Filter den wahren aber verrauschen Zustandsvektor am besten schätzt.

Literatur:

[1] G. Welch, G. Bishop, "An Introduction to the Kalman Filter", Skript 2001, https://courses.cs.washington.edu/courses/cse571/03wi/notes/welch-bishop-tutorial.pdf

[2] E. A. Wan, R. van der Merwe, "The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation", Proc. IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Provessing, Communications and Control, https://groups.seas.harvard.edu/courses/cs281/papers/unscented.pdf

Anhang: Die geruchlose Transformation, vereinfacht

Damit die Notation nicht mit zu vielen Indizes überladen wirkt, wird man sich auf den einfachsten Fall eines Vektors $\boldsymbol{z}$ mit nur einer einzigen Komponente (Dimension $n = 1$) konzentrieren. Diese Variable $\boldsymbol{z}$ weist im Bezug auf einen Referenzwert $\boldsymbol{z}_{ref}$ eine mittelwertfreie zufällige Streuung $\boldsymbol{\eta}$ auf: $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_{ref} + \boldsymbol{\eta}$. Damit ist der Erwartungswert von $\boldsymbol{z}$ gleich zum Referenzwert

$$\mathbb{E}\big[\boldsymbol{z}\big] = \boldsymbol{z}_{ref} + \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}\big] = \boldsymbol{z}_{ref}\,,$$

und die Fehlerkovariant(matrix) $P_{zz} = \mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{ref}\big)\big(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{ref}\big)^{(T)}\Big]$ (eine einzige Variable, daher ist das Transponieren nicht mehr notwendig) ist gleich zur Varianz der Zufallsvariable $\boldsymbol{\eta}$

$$P_{zz} = \mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{ref}\big)\big(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_{ref}\big)\Big] = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^2\big] = \mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{z} - \mathbb{E}\big[\boldsymbol{z}\big]\big)\big(\boldsymbol{z} - \mathbb{E}\big[\boldsymbol{z}\big]\big)\Big]\,.$$

Diese wegen Zufalls streuende Variable $\boldsymbol{z}$ wird nun durch eine nichtlineare Funktion $\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big)$ transformiert und die Aufgabe besteht, eine gute Näherung zur Transformation sowohl der Variable $\boldsymbol{z}$ und zur Fehlerkovarianz(matrix) der Transformierten mit wenig Rechenaufwand zu bestimmen. Angenommen die Streuung $\boldsymbol{\eta}$ ist klein genug, liefert die Taylor-Reihenentwicklung von $\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big)$ bis zur quadratischen Ordnung in $\boldsymbol{\eta}$ folgende Terme

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}_{ref} + \boldsymbol{\eta}\big) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big) + \boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\,\boldsymbol{\eta} + \frac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\,\boldsymbol{\eta}^2 + \dots\,,$$

und somit

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big)\Big] = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big) + 0 + \frac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\,P_{zz} + \dots\,, \tag{20}$$

zusammen mit

$$\mathbb{E}\Big[\overbrace{\Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big) - \mathbb{E}\big[\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big)\big]\Big)}^{\substack{-\frac{\boldsymbol{g}''(\boldsymbol{z}_{ref})}{2}\,P_{zz} + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{z}_{ref})\,\boldsymbol{\eta} \\ +\frac{\boldsymbol{g}''(\boldsymbol{z}_{ref})}{2}\,\boldsymbol{\eta}^2 + \dots}}\Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big) - \mathbb{E}\big[\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big)\big]\Big)\Big]$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\right)^2\Big[P_{zz}^2 - 2P_{zz}\,\overbrace{\mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^2\big]}^{P_{zz}} + \mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^4\big]\Big] + \Big(\boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\Big)^2\overbrace{\mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^2\big]}^{P_{zz}} + \boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^3\big] + \dots$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\right)^2 P_{zz}^2\big(1 - 2 + 3\big) + \Big(\boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\Big)^2 P_{zz} + \dots\,, \tag{21}$$

wobei die letzte Zeile **ausschließlich** für eine normalverteilte Zufallsvariable $\boldsymbol{\eta}$ gilt, weil $\mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^3\big] = 0$ und $\mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^4\big] = 3\left(\mathbb{E}\big[\boldsymbol{\eta}^2\big]\right)^2$ nur für normalverteilte Zufallsvariablen gültig sind.

Die geruchlose Transformation definiert eine simple Methode, welche die Terme in (20) & (21) mittels gewichteter Mittelwerte reproduziert. Dafür werden zuerst die Sigma-Punkte und ihre dazu gehörige Gewichte eingeführt (hier nur 3 Sigma-Punkte wegen der Dimension $n = 1$)

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a=0)} = \boldsymbol{z}_{ref}\,, \quad \boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a=1,2)} = \boldsymbol{z}_{ref} \pm \gamma\,\sqrt{P_{zz}}\,, \tag{22}$$

$$\mathcal{W}_{av}^{(a=0)} = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\,, \quad \mathcal{W}_{co}^{(a=0)} = -\frac{\left(\gamma^2-1\right)^2}{\gamma^2} + \beta\,, \quad \mathcal{W}_{av/co}^{(a=1,2)} = \frac{1}{2\gamma^2}\,,$$

mit einem kleinen positiven Parameter γ (frei wählbar); Parameter β wird später, im Fall einer normalverteilten Zufallsvariable, bestimmt. Anschließend werden folgende gewichtete Summen definiert

- Für die Transformation von $\boldsymbol{z}$ im Sinn von $\mathbb{E}\big[\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big)\big]$

$$\boldsymbol{z}_{trans} \approx \sum_{a=0}^{2} \mathcal{W}_{av}^{(a)}\, \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big)\,. \tag{23}$$

- Für die Fehlerkovarianz(matrix) der Transformierten $\mathbb{E}\Big[\Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big) - \mathbb{E}\big[\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}\big)\big]\Big)^2\Big]$

$$P_{zz,trans} \approx \sum_{a=0}^{2} \mathcal{W}_{co}^{(a)} \Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) - \boldsymbol{z}_{trans}\Big)^2\,. \tag{24}$$

Zum Schluß wird gezeigt, dass solche gewichtete Summe (20) & (21) widergeben bis quadratischer Ordnung in $\boldsymbol{\eta}$ bei der Taylor-Reihenentwicklung von $\boldsymbol{z}$: Angenommen γ ist klein, ergibt sich

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) \overset{\gamma \text{ klein}}{\approx} \begin{cases} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big) & a = 0 \\ \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big) \pm \boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\,\gamma\sqrt{P_{zz}} + \dfrac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\,\gamma^2 P_{zz} & a = 1,2 \end{cases}$$

$$\sum_{a=0}^{2} \mathcal{W}_{av}^{(a)}\, \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) \approx \underbrace{\left(\sum_{a=0}^{2} \mathcal{W}_{av}^{(a)}\right)}_{=1} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big) + \frac{2}{2\gamma^2}\frac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\,\gamma^2 P_{zz} = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big) + \frac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\,P_{zz}\,,$$

wie in (20), und komplett analog

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) - \boldsymbol{z}_{trans} \overset{\gamma \text{ klein}}{\approx} \begin{cases} -\dfrac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\,P_{zz} & a = 0 \\ \pm\boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\,\gamma\sqrt{P_{zz}} + \dfrac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\,\big(\gamma^2-1\big)P_{zz} & a = 1,2 \end{cases}$$

$$\sum_{a=0}^{2} \mathcal{W}_{co}^{(a)} \Big(\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{(a)}\big) - \boldsymbol{z}_{trans}\Big)^2 \approx \left(\frac{\boldsymbol{g}''\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)}{2}\right)^2 \left(\cancel{-\frac{\left(\gamma^2-1\right)^2}{\gamma^2}} + \beta \cancel{+\frac{2}{2\gamma^2}\left(\gamma^2-1\right)^2}\right) P_{zz}^2$$
$$+ \frac{2}{2\gamma^2}\Big(\boldsymbol{g}'\big(\boldsymbol{z}_{ref}\big)\Big)^2 \gamma^2 \Big(\sqrt{P_{zz}}\Big)^2\,,$$

wie in (21) bei normalverteilten Zufallsvariablen für die Wahl $\beta = 2$.