Mathematik:
Vorwissen und Selbststudium

Prof. Thomas Apel

Studienjahr 2010/11

Learning anything changes people;
learning math makes a big change –
it opens minds and opens doors.

[Hirsh Cohen, SIAM president 1983-1984]

Vorwort

Sie alle bringen unterschiedliche Vorkenntnisse mit. Der in diesem Skript zusammengefasste Stoff wurde sicher bei dem einen oder anderen in der Schule behandelt und sollte zur Wiederholung durchgearbeitet werden. Sollte für Sie ein Teil des Stoffes neu sein, sollten Sie sich diesen im Selbststudium erarbeiten. Wenn Zeit bleibt, werden einzelne Themen aus diesem Skript in der Vorlesung besprochen.

Im ersten Trimester werden wir uns mit linearer Algebra beschäftigen. Dazu benötigen Sie im Wesentlichen nur die Grundrechenarten für die reellen Zahlen. Die Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen wird erst ab dem zweiten Trimester benötigt, so dass Sie genügend Zeit haben, eventuell vorhandene Lücken anhand dieses Skripts zu schließen.

Wichtige Webseiten:

- `http://www.unibw.de/bauv1/lehre/Mathematik`
  Webseite zur Vorlesung

- `http://www.unibw.de/rz/dokumente/fakultaeten?id=301960&tid=fakultaeten`
  Dokumente (Skripte, Arbeitsblätter, Übungsblätter, Hausaufgaben, ...)
  zur Veranstaltungsreihe Mathematik I – III

Inhaltsverzeichnis

A Zahlen

A.1 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

A.1.1 Definition und Eigenschaften

Die *Peanoschen Axiome* bilden die Grundlage für den Umgang mit natürlichen Zahlen:

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.
3. 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Jede Zahl ist Nachfolger höchstens einer Zahl.
5. Von allen Mengen, die die Zahl 1 und mit der Zahl n auch deren Nachfolger n' enthalten, ist die Menge der natürlichen Zahlen die kleinste.

Satz A.1 (Summe und Produkt natürlicher Zahlen) *Summe und Produkt zweier natürlicher Zahlen ergeben wieder natürliche Zahlen. Subtraktion und Division sind nicht uneingeschränkt ausführbar.*

Satz A.2 (Eigenschaften von Summe und Produkt) *Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ gelten folgende Gesetze:*

- *Kommutativgesetze*

$$a + b = b + a \qquad \text{und} \qquad a \cdot b = b \cdot a;$$

- *Assoziativgesetze*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{und} \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

- *Distributivgesetz*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Satz A.3 (Ordnung natürlicher Zahlen) *Für 2 natürliche Zahlen a und b gilt entweder*

$$a < b \qquad \text{oder} \qquad a = b \qquad \text{oder} \qquad a > b.$$

Def A.4 (Weitere Rechenoperationen)

- *Das Potenzieren ist rekursiv definiert. Es gilt*

$$a^1 = a \qquad \text{und} \qquad a^n = a \cdot a^{n-1}.$$

Diese Operation ist im Bereich der natürlichen Zahlen uneingeschränkt ausführbar.

- *Beim Radizieren (Wurzelziehen) wird einer Zahl b eine Zahl $a = \sqrt[n]{b}$ (die n-te Wurzel von b) zugeordnet, die durch*

$$a = \sqrt[n]{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a^n = b$$

gegeben ist. Das Radizieren ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht uneingeschränkt ausführbar.

- *Das Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens. Es gilt*

$$n = \log_a b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^n = b.$$

Auch diese Operation ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht uneingeschränkt ausführbar.

Def A.5 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

- *Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert durch*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{j=1}^{n} j.$$

Man definiert

$$0! := 1.$$

- *Der Binomialkoeffizient für eine Zahl α und eine natürliche Zahl k ist definiert durch*

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha - j}{k-j}.$$

Man definiert

$$\binom{\alpha}{0} := 1.$$

Folgerung A.6 *Für natürliche Zahlen n gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } k \leq n \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n.$$

Bem A.7 Fakultät und Binomialkoeffizient werden in der Kombinatorik benötigt, aber auch im *Binomischen Satz*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

A.1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion (Z)

Mit (Z) gekennzeichnete Abschnitte sind Zusatzstoff für interessierte Studenten.

Bem A.8 Ein Beweis ist in der Mathematik der formal korrekte Nachweis, dass aus einer Menge von Aussagen und Axiomen eine weitere Aussage folgt. Hierbei existieren unter anderem drei Methoden, nach denen ein Beweis in der Mathematik durchgeführt werden kann: der direkte Beweis, der indirekte Beweis (Beweis durch Widerspruch) und die vollständige Induktion. Erklärungen und Beispiele findet man auch unter http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Beweisen.

Beim direkten Beweis wird die Behauptung durch Anwenden von bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.

Beim indirekten Beweis zeigt man, dass ein Widerspruch entstünde, wenn die zu beweisende Behauptung falsch wäre (deshalb nennt man diese Methode auch Beweis durch Widerspruch oder reductio ad absurdum). Dazu verwendet man die gleichen Methoden wie beim direkten Beweis. Wenn nun die Behauptung nicht falsch sein kann, muss sie richtig sein. Wichtige (und keinesfalls selbstverständliche!) Voraussetzung für die Gültigkeit eines Widerspruchbeweises ist, dass im zugrundeliegenden System die Aussage nicht gleichzeitig wahr und falsch sein kann (Widerspruchsfreiheit).

Wir wollen uns im Folgenden mit der dritten Beweistechnik, der vollständigen Induktion beschäftigen. Das Prinzip der vollständigen Induktion wird durch das 5. Axiom von Peano gerechtfertigt.

Das Prinzip Angenommen, $A(n)$ ist eine Aussage, die von der natürlichen Zahl n abhängt, zum Beispiel

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Das Prinzip der vollständigen Induktion besagt:

Wenn $A(1)$ wahr ist, und wenn aus $A(k)$ die Aussage $A(k+1)$ folgt, dann ist $A(n)$ für alle n wahr.

IA: A ist wahr für $n = 1$.

IS: Wenn A für $n = k$ wahr ist, dann ist A auch für $n = k + 1$ wahr.

Bsp A.9 (Analogien) Betrachten wir einen Eisenbahnzug. Die Lok bewegt sich. Sie ist an den ersten Wagen gekoppelt, also muss sich dieser auch bewegen. Der erste Wagen zieht den zweiten usw., bis sich der ganze Zug bewegt.

Die vollständige Induktion lässt sich auch mit einem Dominoeffekt vergleichen. Man stellt die Steine so auf, dass, wenn einer umfällt, auch der nächste umfällt (Induktionsschritt, $n \Rightarrow n + 1$), und stößt den ersten Stein um (Induktionsanfang, $n = 0$).

Bsp A.10 Es soll gezeigt werden, dass für alle natürlichen Zahlen n die Beziehung

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

gültig ist.

Induktionsanfang

$A(1)$ gilt, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$.

Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung/-annahme: $A(k)$ gilt, das heißt

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Induktionsbehauptung: $A(k+1)$ gilt auch, das heißt

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Beweis der Induktionsbehauptung: Es ist

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \qquad \text{lt. Ind.-annahme} \\ &= (k+1)\Big(\frac{1}{2}k + 1\Big) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

q.e.d.

Ü A.11 *Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion:*

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

b) $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *für* $q \neq 1$.

c) $n^2 > 2n + 1$ *für* $n \geq 3$.

d) $2^n > n^2$ *für* $n \geq 5$.

e) $\binom{\alpha}{0} + \ldots + \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+k+1}{k}$.

f) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

g) Die Potenzmenge einer n*-elementigen Menge besitzt* 2^n *Elemente.*

h) Es seien n *Geraden in einer Ebene gegeben. Es ist möglich, die Teilflächen, in die die Ebene geteilt wird, mit nur zwei Farben so zu färben, dass keine benachbarten Flächen dieselben Farben haben. (beachbart = gemeinsame Kante)*

i) $(1+h)^n > 1 + nh$ *für* $h > -1$, $h \neq 0$, $n \geq 2$ *(Bernoulli-Ungleichung).*

A.2 Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{R}$

A.2.1 Gebrochene Zahlen $\mathbb{Q}^\star$

Def A.12 (Gebrochene Zahlen) *Gebrochene Zahlen sind Quotienten natürlicher Zahlen,*

$$\mathbb{Q}^\star = \{x = \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{N}\}.$$

Bem A.13

- Für die gebrochenen Zahlen ist auch die Division uneingeschränkt ausführbar, die Subtraktion jedoch nicht.
- Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der gebrochenen Zahlen.

Def A.14 (Potenzieren, Radizieren) *Das Potenzieren und das Radizieren ist in* Def A.4 *für natürliche Zahlen definiert und kann für gebrochene Zahlen erweitert werden.*

- *Man definiert a^n für $a \in \mathbb{Q}^\star$ rekursiv durch*

  $$a^1 = a, \quad a^n = a \cdot a^{n-1},$$

  wenn der Exponent n eine natürliche Zahl ist.
- *Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Wurzel durch*

  $$a = \sqrt[n]{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a^n = b$$

  definiert.
- *Wir können auch das Potenzieren mit gebrochenem Exponent einführen,*

  $$a^{p/q} := \sqrt[q]{a^p}.$$

- *Für $a, b, c \in \mathbb{Q}^\star$ gilt*

  $$\begin{aligned} a = \sqrt[c]{b} &\iff a^c = b \\ c = \log_a b &\iff a^c = b. \end{aligned}$$

Bem A.15 Die Menge der gebrochenen Zahlen ist dicht. Das heißt, zwischen zwei gebrochenen Zahlen a und b liegt mindestens eine weitere gebrochene Zahl, zum Beispiel $\frac{a+b}{2}$.

Bem A.16 (Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^\star$) Die Menge der gebrochenen Zahlen ist abzählbar, das heißt, die gebrochenen Zahlen können durchnummeriert werden.

Das *Cantorsche Diagonal-Abzählverfahren* besteht aus zwei Schritten:

1. Anordnen der gebrochenen Zahlen nach dem Schema in Abb. 1; dabei werden alle Brüche weggelassen, bei denen Zähler und Nenner nicht teilerfremd sind;
2. Durchzählen entlang der Diagonalen.

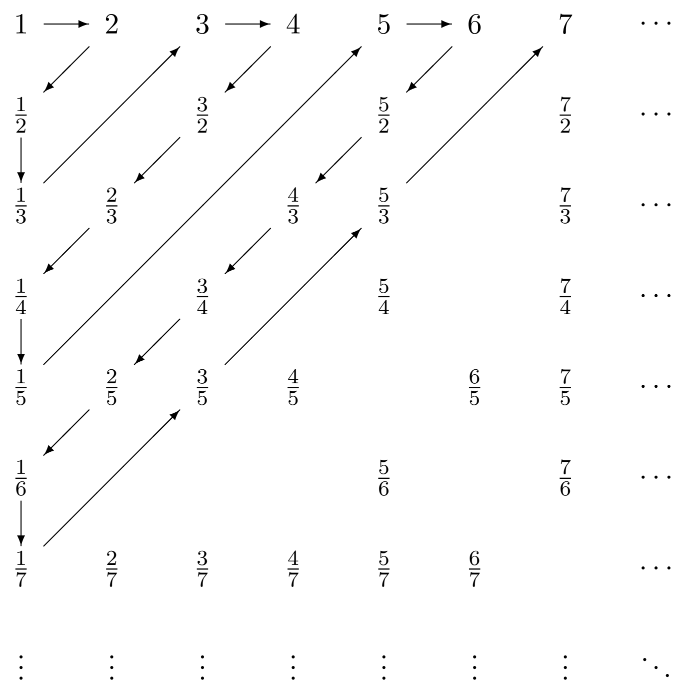


Abbildung 1: Cantorsches Diagonal-Abzählverfahren

A.2.2 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Def A.17 (Ganze Zahlen) *Die ganzen Zahlen bilden die Menge*

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Bem A.18

- Die Subtraktion ist im Bereich der ganzen Zahlen uneingeschränkt ausführbar, die Division dagegen nicht.
- Die natürlichen Zahlen bilden eine Teilmenge der ganzen Zahlen.
- Das Potenzieren, Radizieren oder Logarithmieren wird wie bei den natürlichen Zahlen eingeführt und kann zum Teil erweitert werden. Für positive ganze Zahlen b (d.h. $b \in \mathbb{N}$) definiert man

$$\begin{array}{rcl} a^b & & \text{wie bei natürlichen Zahlen} \\ a^0 & := & 1 \\ a^{-b} & := & \frac{1}{a^b} \end{array}$$

  Für $a, b > 0$ definiert man

$$a = \sqrt[c]{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^c = b.$$

  Für $a, b > 0$ und $a \neq 1$ definiert man

$$c = \log_a b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^c = b.$$

A.2.3 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Def A.19 (Rationale Zahlen) *Rationale Zahlen sind Quotienten ganzer Zahlen,*

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} :\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}.$$

Bem A.20

- Im Bereich der rationalen Zahlen sind Division und Subtraktion uneingeschränkt ausführbar. Ausnahme: Die Division durch Null ist nicht erlaubt.

- Für ganze Zahlen b ist a^b wie in Abschnitt A.2.2 definiert. Für $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ist a^b nur für $a > 0$ definiert. Man definiert a^b für $b > 0$ wie bei den gebrochenen Zahlen und setzt

$$a^b = \begin{cases} 1 & \text{für } b = 0 \\ \frac{1}{a^{-b}} & \text{für } b < 0. \end{cases}$$

- Für $a, b > 0$ definiert man

$$a = \sqrt[c]{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b.$$

  Man beachte, dass das Ergebnis beim Radizieren per Definition *immer* eine positive Zahl (oder null) ist. Der Ausdruck $\sqrt[3]{-8}$ ist also nicht definiert, obwohl der Taschenrechner die Lösung -2 liefert.

- Das Logarithmieren ist nur für $a, b > 0$ und $a \neq 1$ definiert,

$$c = \log_a b \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b.$$

- Radizieren und Logarithmieren sind auch im Bereich der rationalen Zahlen nicht uneingeschränkt ausführbar.

A.2.4 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die Menge der rationalen Zahlen liegt zwar auf dem Zahlenstrahl dicht, dennoch füllen sie diesen nicht lückenlos. Nicht rational sind zum Beispiel die Zahlen

$$\begin{array}{lll} \sqrt{2} & \ldots & \text{die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat} \\ \pi & \ldots & \text{der Umfang des Kreises mit Durchmesser 1.} \end{array}$$

Wenn jede Strecke eine Maßzahl als Länge haben soll, so ist ein neuer Zahlenbereich erforderlich, der eine Erweiterung des Bereiches der rationalen Zahlen darstellt. Die theoretische Fortsetzung des Messvorganges bei Strecken gibt Hinweise zu seiner Konstruktion. Um eine Strecke genau durch eine Einheitsstrecke e zu messen, verwendet man nacheinander die Messstrecken e, $\frac{e}{10}$, $\frac{e}{100}$, ... Jede weitere Messung steuert eine neue Dezimale zur Maßzahl bei. So entsteht ein Dezimalbruch, der nur in Ausnahmefällen abbricht oder periodisch wird, das heißt eine rationale Zahl darstellt. Im Allgemeinen ist er unendlich.

Def A.21 (Reelle Zahlen) *Die endlichen und unendlichen positiven und negativen Dezimalbrüche bilden den Bereich der reellen Zahlen, der durch $\mathbb{R}$ gekennzeichnet wird.*

Reelle Zahlen lassen sich in anschaulicher Weise durch Punkte auf einer Geraden, der *Zahlengeraden*, darstellen. Die Zuordnung ist eineindeutig (umkehrbar eindeutig).

Da reelle Zahlen aus der Schule bekannt sind, sollen hier nur einige wesentliche Eigenschaften kurz zusammengefasst werden. Ausführlichere Darstellungen findet man in der Literatur, z.B. [Pap1, I.2 – I.4], [Wes1, I.4 – I.5].

Bem A.22 (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren)

- Das Potenzieren $a = b^c$ ist für $b > 0$ über Intervallschachtelung definiert. Das sei hier nicht näher ausgeführt.

- Radizieren und Logarithmieren sind die Umkehrfunktionen zum Potenzieren. Für $a, b > 0$ gilt

  $$a = \sqrt[c]{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b.$$

  Falls zusätzlich $a \neq 1$, dann gilt

  $$c = \log_a b \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b.$$

- Logarithmieren und Radizieren sind auch für reelle Zahlen nicht uneingeschränkt ausführbar. Dadurch sind nicht alle algebraischen Gleichungen lösbar, zum Beispiel $x^2 + 1 = 0$.

- Das Ziel der Zahlenbereichserweiterung auf die komplexen Zahlen ist die Lösbarkeit aller algebraischen Gleichungen.

Satz A.23 (Eigenschaften der reellen Zahlen)

- *Summe, Differenz, Produkt und Quotient reeller Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen. Ausnahme: Division durch Null ist nicht erlaubt.*
- *Kommutativgesetze:* $a + b = b + a$, $ab = ba$.
- *Assoziativgesetze:* $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$.
- *Distributivgesetz:* $a(b + c) = ab + ac$.
- *Ordnung: Für zwei reelle Zahlen* a *und* b *gilt entweder* $a < b$ *oder* $a = b$ *oder* $a > b$.

Def A.24

- *Das Symbol* $a \leq b$ *bedeutet* $a < b$ *oder* $a = b$.
  Das Symbol $a \geq b$ *bedeutet* $a > b$ *oder* $a = b$.
- *Der Betrag einer reellen Zahl ist durch*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

definiert.

Satz A.25 (Dreiecksungleichung) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Ü A.26 http://www.mathe-online.at/tests/zahlen/zahlenmengen.html
http://www.mathe-online.at/tests/zahlen/elementar.html
http://www.mathe-online.at/tests/var/herausheben.html
http://www.mathe-online.at/tests/var/binomischeFormeln.html
http://www.mathe-online.at/tests/var/termumformen.html

A.3 Intervalle, Schranken, Gleichungen, Ungleichungen

Literatur: [Pap1, I.2–4]

Def A.27 (Zusammenstellung der wichtigsten Intervalle)

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	*abgeschlossenes endliches Intervall*
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	*halboffenes endliches Intervall*
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	*halboffenes endliches Intervall*
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	*offenes endliches Intervall*
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < \infty\}$	*abgeschlossenes unendliches Intervall*
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq b\}$	*abgeschlossenes unendliches Intervall*
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < \infty\}$	*offenes unendliches Intervall*
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$	*offenes unendliches Intervall*
$\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$	*Menge der positiven reellen Zahlen*
$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$	*ε-Umgebung der Zahl x*

Dabei heißt ein Intervall I offen, wenn es für jedes $x \in I$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(x) \subset I$. Ein Intervall I heißt abgeschlossen, wenn es seine Ränder enthält.

Def A.28 (Schranken)

- *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $K < \infty$ gibt, so dass $x \leq K$ für alle $x \in M$ gilt. Die Zahl K heißt obere Schranke.* *Die kleinste obere Schranke* $\sup M$ *bezeichnet man als Supremum von M. Ist das Supremum selbst Element der Menge, so heißt es Maximum,* $\max M$.

- *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $K > -\infty$ gibt, so dass $x \geq K$ für alle $x \in M$ gilt. Die Zahl K heißt untere Schranke.*
  Die größte untere Schranke $\inf M$ *bezeichnet man als Infimum von M. Ist das Infimum selbst Element der Menge, so heißt es Minimum,* $\min M$.

- *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, d.h., wenn es eine Zahl $K < \infty$ gibt, so dass $|x| \leq K$ für alle $x \in M$ gilt. Die Zahl K heißt Schranke der Menge M.*

Satz A.29 (Regeln für das Umformen von Gleichungen)

- *Ein beliebiger Term darf auf beiden Seiten addiert oder subtrahiert werden,*
$$a = b \quad \Rightarrow \quad a \pm c = b \pm c.$$
- *Beide Seiten einer Gleichung dürfen mit einer beliebigen reellen Zahl* c *multipliziert werden,*
$$a = b \quad \Rightarrow \quad ac = bc.$$
- *Beide Seiten einer Gleichung dürfen durch eine beliebige reelle Zahl* $c \neq 0$ *dividiert werden,*
$$a = b \quad \Rightarrow \quad a : c = b : c.$$
Ist $c = c(x)$ *ein Term, der eine Variable* x *enthält, ist der Fall, dass* $c(x) = 0$ *wird, auszuschließen (Fallunterscheidung).*

Satz A.30 (Regeln für das Umformen von Ungleichungen) *Die folgenden Regeln wurden für den Fall des Kleinerzeichens* $<$ *formuliert, gelten aber entsprechend auch für den Fall des Größerzeichens* $>$ *und die kombinierten Zeichen* $\leq$ *und* $\geq$*.*

- *Es gilt das Transitivitätsgesetz,*
$$(a < b \quad \wedge \quad b < c) \quad \Rightarrow \quad a < c.$$
- *Ein beliebiger Term darf auf beiden Seiten addiert oder subtrahiert werden,*
$$a < b \quad \Rightarrow \quad a \pm c < b \pm c.$$
- *Beide Seiten einer Ungleichung dürfen mit einer beliebigen positiven reellen Zahl* $c > 0$ *multipliziert oder durch eine beliebige positive reelle Zahl* $c > 0$ *dividiert werden,*
$$a < b \quad \wedge \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc, \quad a : c < b : c.$$
Die Multiplikation/Division mit einer negativen reellen Zahl $c < 0$ *kehrt das Relationszeichen um,*
$$a < b \quad \wedge \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc, \quad a : c > b : c.$$
Ist $c = c(x)$ *ein Term, der eine Variable* x *enthält, sind die Fälle* $c(x) > 0$*,* $c(x) < 0$ *und* $c(x) = 0$ *zu unterscheiden.*
- *Zwei Ungleichungen mit gleichem Relationszeichen dürfen addiert werden,*
$$a < b \quad \wedge \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d.$$

Bem A.31 Im Buch von Westermann [Wes1] ist das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit Hilfe von MAPLE beschrieben.

Ü A.32 http://www.mathe-online.at/tests/gleich/aequivalenz.html
http://www.mathe-online.at/tests/var/kuerzenfehler.html
http://www.mathe-online.at/tests/gleich/loesungsmenge.html
http://www.mathe-online.at/tests/gleich/keineloesung.html

B Reelle Funktionen

B.1 Definition und Darstellung einer Funktion

Reelle Funktionen sind aus der Schule bekannt, deshalb sollen hier nur einige wesentliche Punkte zusammengefasst werden. Ausführlichere Darstellungen findet man in der Literatur, z.B. [Pap1, Kap. III.1 – III.2, III.5 – III.13], [Wes1, Kap. IV].

Def B.1 *Unter einer Funktion oder Abbildung*[1] *versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge $D_f \subset D$ genau ein Element y einer Menge $W_f \subset W$ zuordnet. Bezeichnet man die Funktion mit f, wird die Zuordnung symbolisch durch*

$$f : D_f \to W, \quad x \mapsto y = f(x)$$

ausgedrückt. Dabei heißen

- x *unabhängige Variable* oder *Argument*,
- y *abhängige Variable* oder *Funktionswert*,
- D_f *Definitionsbereich* und
- $W_f = \{y = f(x) \in W : x \in D_f\}$ *Wertebereich der Funktion.*

Bem B.2 (Darstellung von Funktionen) Wir werden uns im Weiteren mit Funktionen beschäftigen, für die D die Menge der reellen Zahlen oder eine Teilmenge davon ist. Für solche Funktionen gibt es verschiedene Darstellungsarten:

explizite Darstellung: $y = f(x)$.

implizite Darstellung: $F(x; y) = 0$.

Parameterdarstellung: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Wertetabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	...
$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$y_3 = f(x_3)$	$y_4 = f(x_4)$	...

graphische Darstellung: Die Funktion wird als Kurve (Graph) in einem rechtwinkligen (kartesischen) Koordinatensystem dargestellt. Die unabhängige Variable wird dabei auf der waagerechten Achse (*Abszisse*) aufgetragen, die abhängige Variable auf der senkrechten Achse (*Ordinate*).

Ü B.3 `http://www.mathe-online.at/tests/fun1/grongr.html`

[1] Manchmal wird der Begriff Abbildung auch noch allgemeiner verwendet, siehe z. B. [Ri, S. 30f.]

B.2 Allgemeine Eigenschaften einer Funktion

Def B.4 *Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.*

Die Bestimmung der Nullstellen ist äquivalent zum Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.

Def B.5 (Symmetrie-Eigenschaften) *Eine Funktion f mit symmetrischem Definitionsbereich D heißt gerade, wenn sie für jedes $x \in D$ die Bedingung*

$$f(-x) = f(x)$$

erfüllt. Sie heißt ungerade, wenn für jedes $x \in D$ die Bedingung

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt.

Der Graph einer geraden Funktion ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse, der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Ü B.6 http://www.mathe-online.at/tests/fun2/symmoderantisymm.html

Def B.7 (Monotonie-Eigenschaften) *Eine Funktion f heißt*

- *monoton wachsend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,*
- *streng monoton wachsend, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$,*
- *monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$, für $x_1 < x_2$,*
- *streng monoton fallend, wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1 < x_2$.*

Def B.8 (Periodizität) *Eine Funktion f heißt periodisch mit Periode p, wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm p$ zu D gehört und*

$$f(x \pm p) = f(x)$$

gilt.

Ü B.9 http://www.mathe-online.at/tests/fun1/eigensch.html
http://www.mathe-online.at/tests/fun2/periodischodernicht.html
http://www.mathe-online.at/tests/fun2/beschraenktodernicht.html
http://www.mathe-online.at/tests/fun2/obenoderunten.html

Def B.10 (Umkehrung einer Funktion) *Eine Funktion f heißt umkehrbar, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. Ist f umkehrbar, so gehört zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$. Die Funktion $g : W_f \to D_f$, $y \mapsto x$ mit $f(x) = y$ heißt Umkehrfunktion der Funktion f. Sie wird manchmal auch mit f^{-1} bezeichnet.*

Bem B.11 Man erhält den Graph der Umkehrfunktion durch Spiegelung des Graphen der Ausgangsfunktion an der Geraden $y = x$.

B.3 Polynome

Literatur: z.B. [Pap1, Kap. II.5]

Def B.12 *Polynome oder ganzrationale Funktionen sind Funktionen vom Typ*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Sie sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen Koeffizienten. Unter der Voraussetzung $a_n \neq 0$ heißt die Zahl n Grad des Polynoms.

Satz B.13 (Koeffizientenvergleich) *Zwei Polynome stimmen genau dann überein, wenn sie dieselben Koeffizienten besitzen.*

Ü B.14 http://www.mathe-online.at/tests/var/polynome.html
http://www.mathe-online.at/tests/fun1/erkennen.html

Bem B.15 Für die Nullstellen eines Polynoms ersten oder zweiten Grades gelten die Lösungsformeln

$$\begin{array}{ll} p_1(x) = ax + b & x_1 = -\dfrac{b}{a} \\ p_2(x) = x^2 + px + q & x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \end{array}$$

Auch für Polynome 3. und 4. Grades gibt es noch Lösungsformeln. Ab Polynomgrad 5 gibt es keine Lösungsformeln. In einfachen Fällen kann man für Polynome 3. oder höheren Grades Nullstellen erraten, siehe Beispiel B.19, im Allgemeinen ist man auf numerische Verfahren (Näherungsverfahren) angewiesen.

Bsp B.16 Numerisch kann man eine Nullstelle eines Polynoms $p(x)$ mit dem Newtonverfahren bestimmen. Man startet mit einer (fast) beliebigen Zahl x_0 und berechnet rekursiv die Zahlen

$$x_{k+1} := \varphi(x_k) := x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}.$$

Sei zum Beispiel

$$p(x) = 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36,$$

dann ist

$$\varphi(x) = x - \frac{2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36}{8x^3 - 30x^2 + 4x + 42}$$

und folglich

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & p(x_0) = -36 \\ x_1 = \varphi(x_0) = 0.857142857142 86 & p(x_1) = -3.74843815077051 \\ x_2 = \varphi(x_1) = 0.98901098901099 & p(x_2) = -0.26566571434142 \\ x_3 = \varphi(x_2) = 0.99992087614004 & p(x_3) = -0.00189907280751 \\ x_4 = \varphi(x_3) = 0.99999999582680 & p(x_4) = -1.001568108449646 \cdot 10^{-07} \\ x_5 = \varphi(x_4) = 1.00000000000000 & p(x_5) = -7.105427357601002 \cdot 10^{-15} \end{array}$$

Wir haben eine Folge von Zahlen konstruiert, die gegen die tatsächliche Nullstelle $x = 1$ konvergiert. Zahlenfolgen und deren Konvergenz werden in Kapitel C behandelt.

Def B.17 (Horner-Schema) *Das Rechenverfahren*

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & b_{n-1}x_0 & b_{n-2}x_0 & \dots & b_2x_0 & b_1x_0 & b_0x_0 \\ \hline x_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & b_{-1} \end{array}$$

mit $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = a_k + b_k x_0$, $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ heißt Horner-Schema.

Satz B.18 (Verwendung des Hornerschemas) *Es gilt:*

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= b_{-1}, \\ \frac{p_n(x)}{x - x_0} &= b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 + \frac{b_{-1}}{x - x_0}, \end{aligned}$$

d.h., das Hornerschema kann zur Funktionswertberechnung und zur Division des Polynoms $p_n(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_0$ benutzt werden.

Beweis Der Beweis erfolgt durch Einsetzen der Definition der b_k:

$$\begin{aligned} &(x - x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + b_{-1} \\ &\quad = (b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + \dots + b_1 x^2 + b_0 x) - \\ &\qquad -(b_{n-1}x_0 x^{n-1} + b_{n-2}x_0 x^{n-2} + \dots + b_1 x_0 x + b_0 x_0) + b_{-1} \\ &\quad = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - b_{n-1}x_0)x^{n-1} + \dots + (b_0 - b_1 x_0)x + (b_0 x_0 + b_{-1}) \\ &\quad = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \;=\; p_n(x). \end{aligned}$$

Setzt man $x = x_0$ ein, erhält man die erste Formel aus Satz B.18. Dividiert man durch $x - x_0$ erhält man die zweite Formel. q.e.d.

Bsp B.19 Man kann alle Nullstellen eines Polynoms bestimmen, indem man eine Nullstelle rät und dann mittels Hornerschema die Linearfaktoren abdividiert: Ist x_0 eine Nullstelle von $p_n(x)$ und ist

$$p_{n-1}(x) := b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

das Polynom mit den im Horner-Schema entstehenden Koeffizienten, dann gilt

$$p_n(x) = (x - x_0)\, p_{n-1}(x),$$

man kann also mit der Nullstellenbestimmung fortfahren, indem man die Nullstellen von p_{n-1} rät.

Sei $p_4(x) = 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36$. Wir raten die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -10 & 2 & 42 & -36 \\ & & 2 & -8 & -6 & 36 \\ \hline 1 & 2 & -8 & -6 & 36 & 0 \\ & & 6 & -6 & -36 & \\ \hline 3 & 2 & -2 & -12 & 0 & \end{array}$$

Die restlichen beiden Nullstellen erhält man mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 2x - 12 \\ 0 &= x^2 - x - 6 \\ x_{3,4} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Wir erhalten $x_3 = 3$ und $x_4 = -2$. Die Nullstelle bei $x = 3$ tritt zweimal auf, sie heißt *doppelte Nullstelle*. Das Polynom kann folglich auch in Form des Produkts $p_4(x) = 2(x-1)(x-3)^2(x+2)$ geschrieben werden.

Satz B.20 (Faktorisierung eines Polynoms) *Besitzt ein Polynom*

$$p_n(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

genau n Nullstellen x_1, ..., x_n, so lässt sich p_n auch in Form eines Produkts darstellen,

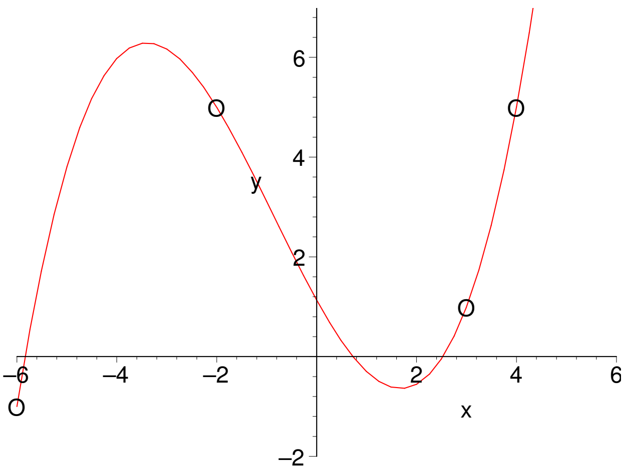
$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Bem B.21

1. Der *Hauptsatz der Algebra* besagt, dass jedes Polynom n-ten Grades tatsächlich genau n Nullstellen (die entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden) besitzt. Die Nullstellen können jedoch auch komplexe Zahlen sein. Wir werden im Kapitel 3 darauf zurück kommen.

2. Man kann weitere Zeilen zum Horner-Schema hinzufügen und so auch die Ableitungen von p_n an der Stelle x_0 berechnen (genauer: man berechnet $\frac{1}{k!}p_n^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Bem B.22 Polynome eignen sich gut zur Annäherung von Funktionen. Wir werden in Kapitel 6.3 Taylor-Polynome kennen lernen. Im 2. Studienjahr behandeln Sie auch Interpolationspolynome. Ein Interpolationspolynom ist ein Polynom n-ten Grades, das durch die $n+1$ Kurvenpunkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) (z.B. Messpunkte) beschrieben wird, siehe Diagramm.



B.4 Gebrochen rationale Funktionen

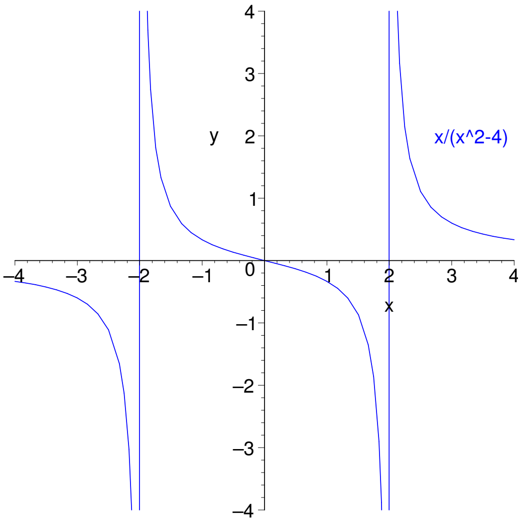
Def B.23 *Gebrochen rationale Funktionen sind Funktionen, die sich als Quotient zweier Polynome darstellen lassen. Ist der Polynomgrad im Zähler kleiner als der im Nenner, spricht man von einer echt gebrochen rationalen Funktion, andernfalls von einer unecht gebrochen rationalen Funktion.*

Def B.24 *Stellen, in deren Umgebung die Funktionswerte über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen, heißen Pole oder Unendlichkeitsstellen der Funktion.*

Satz B.25 (Eigenschaften)

1. *Eine gebrochen rationale Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms (Definitionslücken).*
2. *Eine gebrochen rationale Funktion besitzt überall dort eine Nullstelle, wo das Zählerpolynom den Wert Null, das Nennerpolynom jedoch einen von Null verschiedenen Wert annimmt.*
3. *In Stellen, in denen das Nennerpolynom verschwindet, das Zählerpolynom jedoch nicht, besitzen gebrochen rationale Funktionen Polstellen.*
4. *Unecht gebrochen rationale Funktionen können durch Polynomdivision in die Summe aus einem polynomialen und einem echt gebrochen rationalen Anteil zerlegt werden.*

Bsp B.26 Funktionsgraph von $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$



Bem B.27 Ein Sonderfall tritt ein, wenn Zähler- und Nennerpolynom gemeinsame Nullstellen besitzen. In diesem Falle kürzt man gemeinsame Linearfaktoren heraus. Dadurch können u.U. Definitionslücken *behoben* und damit der Definitionsbereich erweitert werden.

Ü B.28 *http://www.mathe-online.at/tests/var/kuerzen.html*
http://www.mathe-online.at/tests/gleich/definitionsmenge.html

B.5 Potenzfunktionen

Def B.29 *Funktionen der Form*

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq 0,$$

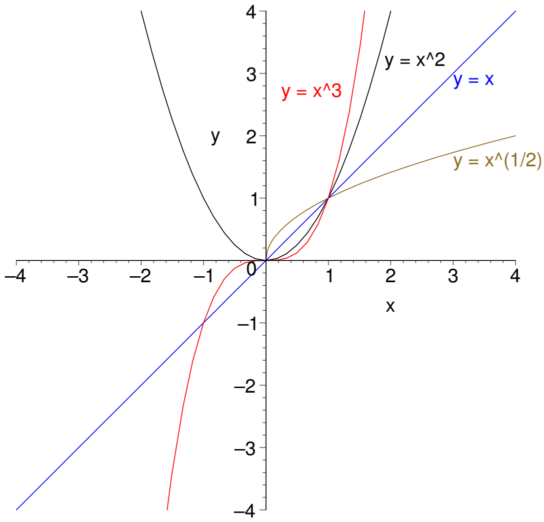
heißen Potenzfunktionen. Potenzfunktionen, deren Exponent eine natürliche Zahl ist, sind überall in $\mathbb{R}$ definiert; im Allgemeinen sind die Potenzfunktionen nur für $x \geq 0$ definiert.

Potenzfunktionen mit dem Exponenten $\alpha = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, schreibt man auch in der Form

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

und bezeichnet sie als Wurzelfunktionen.

Bsp B.30 Funktionsgraph für die Funktionen $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^{1/2}$.



Satz B.31

1. *Potenzfunktionen mit geradzahligen Exponenten sind gerade; Potenzfunktionen mit ungeradzahligen Exponenten sind ungerade.*

2. *Es gelten die Potenzgesetze*

$$\begin{aligned} x^\alpha \cdot x^\beta &= x^{\alpha+\beta} \\ (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha \cdot \beta} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ für $x \geq 0$.

3. *Die Funktion $x^{1/\alpha}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion x^α.*

Ü B.32 http://www.mathe-online.at/tests/pot/rationaleExponenten.html
http://www.mathe-online.at/tests/pot/potenzenWurzeln.html

B.6 Exponentialfunktionen

Literatur: [Pap1, Kap. III.11]

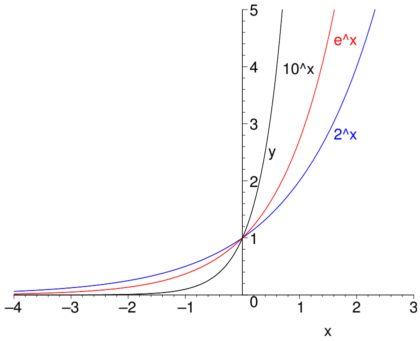
Def B.33 *Funktionen vom Typ*

$$f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

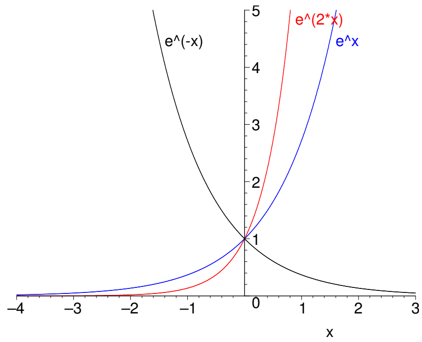
heißen Exponentialfunktionen. Die Zahl a heißt Basis. Exponentialfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, der Wertebereich ist $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Bsp B.34

Funktionsgraphen von $y = 2^x$, $y = e^x$ und $y = 10^x$



Funktionsgraphen von $y = e^x$, $y = e^{2x}$ und $y = e^{-x}$.



Bem B.35 Von besonderer Bedeutung sind die Exponentialfunktionen $y = e^x$ und $y = e^{-x}$ mit der Eulerschen Zahl $e \approx 2,718281$ als Basis.

Satz B.36 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

1. *Für $a \in (0,1)$ ist die Exponentialfunktion a^x streng monoton fallend, für $a > 1$ ist sie streng monoton wachsend.*
2. *Es gelten die von den Potenzfunktionen bekannten Rechengesetze*
$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y}, \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, \\ (a^x)^y &= a^{xy}. \end{aligned}$$
3. *Die Funktionsgraphen der Funktionen $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ sind spiegelsymmetrisch zur y-Achse.*
4. *Jede Funktion a^x ist auch in der Form $e^{\lambda x}$ mit $\lambda = \ln a$ darstellbar. Entsprechend gilt: Die Funktion $e^{\lambda x}$ ist streng monoton wachsend, wenn $\lambda > 0$ und streng monoton fallend, wenn $\lambda < 0$.*

Bem B.37 Exponentialfunktionen treten häufig auf, wenn Wachstums- oder Abklingprozesse beschrieben werden, siehe auch [Pap1, Kap. III.11.3].

Ü B.38 *http://www.mathe-online.at/tests/log/eigenschExp.html*
http://www.mathe-online.at/tests/log/zunabn.html
http://www.mathe-online.at/tests/log/wieschnell.html
http://www.mathe-online.at/tests/log/umrBasen.html

B.7 Logarithmusfunktionen

Literatur: [Pap1, Kap. III.12]

Def B.39 *Unter der Logarithmusfunktion*

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

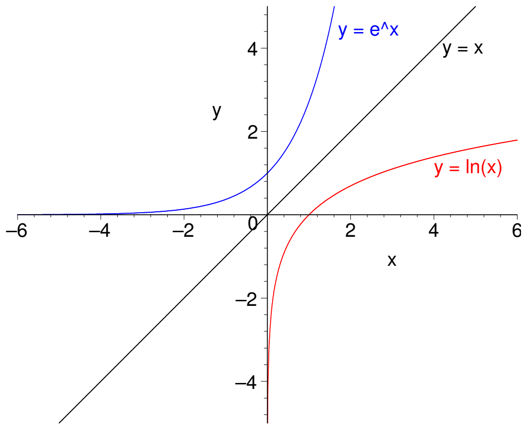
versteht man die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion a^x, d.h.

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y.$$

Die Zahl a heißt Basis. Logarithmusfunktionen sind für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ definiert, der Wertebereich ist ganz $\mathbb{R}$.

Bem B.40 Von besonderer Bedeutung ist die *natürliche Logarithmusfunktion* $\ln x := \log_{\mathrm{e}} x$ mit der Eulerschen Zahl $\mathrm{e} \approx 2,718281$ als Basis.

Bsp B.41 Funktionsgraphen von $y = \mathrm{e}^x$ und ihrer Umkehrfunktion $y = \ln x$.



Satz B.42 (Eigenschaften der Logarithmusfunktion)

1. *Für jede zulässige Basis a besitzt die Logarithmusfunktion nur die Nullstelle $x_0 = 1$.*

2. *Es gelten die Rechengesetze*

$$\begin{aligned}\log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y,\\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y,\\ \log_a(x^y) &= y \log_a x.\end{aligned}$$

3. *Jede Funktion $\log_a x$ ist auch mit dem natürlichen Logarithmus darstellbar,*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Beweis Wir beweisen hier nur Eigenschaft 3. Es gilt laut Definition

$$x = a^{\log_a x}.$$

Wir bilden den natürlichen Logarithmus beider Seiten und wenden die Logarithmengesetze an,

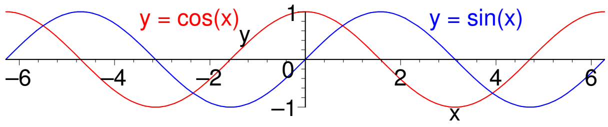
$$\ln x = \ln(a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \ln a.$$

Die Division durch $\ln a$ liefert die Behauptung. q.e.d.

B.8 Trigonometrische Funktionen

Ü B.43 *Wiederholen Sie die Definition der Winkelfunktionen. Testen Sie Ihr Wissen anhand* `http://www.mathe-online.at/tests/wfun/defWfun.html` *und* `http://www.mathe-online.at/tests/wfun/eigenschWfun.html`*.*

Bsp B.44 Funktionsgraphen der Sinus- und Kosinusfunktion



Bem B.45 Mathematiker lassen die Klammern oft weg,

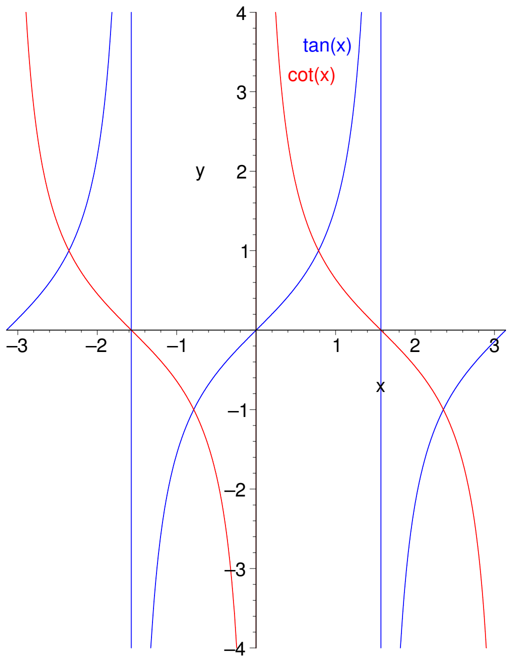
$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x), \\ \cos^2 x &= (\cos x)^2 = \Big(\cos(x)\Big)^2, \end{aligned}$$

denn durch eine Vielzahl von Klammern werden Formeln auch nicht übersichtlichtlicher.

Satz B.46 (Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion)

	$\sin x$	$\cos x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertebereich	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Periode	2π	2π
Symmetrie	*ungerade*	*gerade*
Nullstellen	$x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Pole	*keine*	*keine*

Bsp B.47 Funktionsgraphen der Tangens- und Kotangensfunktion



Satz B.48 (Eigenschaften der Tangens- und Kotangensfunktion)

	$\tan x$	$\cot x$
Definitionsbereich	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
Wertebereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Periode	π	π
Symmetrie	*ungerade*	*ungerade*
Nullstellen	$x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Pole	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Satz B.49 (Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen)

1. *Verschiebungen:*

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

2. *Trigonometrischer Pythagoras:* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3. *Additionstheoreme:*

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{aligned}$$

Bem B.50 Durch ihre Periodizität eignen sich die trigonometrischen Funktionen besonders zur Beschreibung periodischer Vorgänge. Anwendungen in der Schwingungslehre kann man z.B. in [Pap1, III.9.5] nachlesen.

Ü B.51 *http://www.mathe-online.at/tests/wfun/groesser1.html*

B.9 Arkusfunktionen

Quelle: [Pap1, Kap. III.10]

Grundsätzlich lassen sich die trigonometrischen Funktionen infolge fehlender Monotonie nicht umkehren. Beschränkt man sich jedoch auf gewisse Intervalle, in denen die Funktionen monoton verlaufen und dabei sämtliche Funktionswerte annehmen, so ist jede der vier Winkelfunktionen umkehrbar. Die Umkehrfunktionen werden als Arkusfunktionen oder zyklometrische Funktionen bezeichnet.

Def B.52 *Die Arkussinusfunktion*

$$f(x) = \arcsin x$$

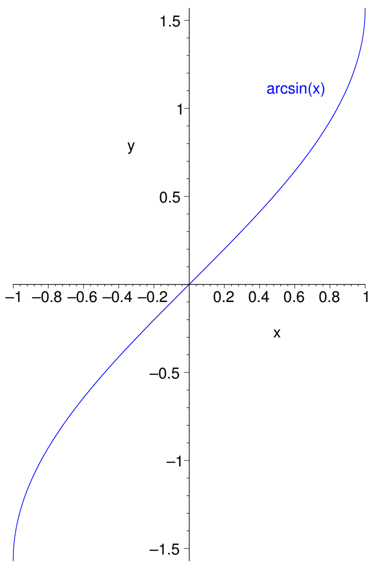
ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ beschränkten Sinusfunktion.

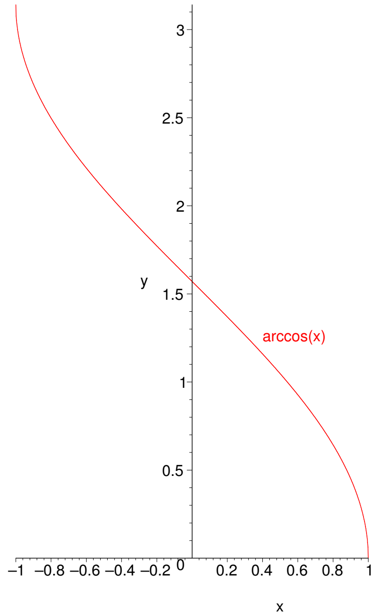
Die Arkuskosinusfunktion

$$f(x) = \arccos x$$

ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $[0, \pi]$ beschränkten Kosinusfunktion.

Bsp B.53 Funktionsgraphen der Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion





Satz B.54 (Eigenschaften der Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion)

	$\arcsin x$	$\arccos x$
Definitionsbereich	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Wertebereich	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$
Symmetrie	*ungerade*	*keine*
Nullstellen	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$
Monotonie	*streng monoton wachsend*	*streng monoton fallend*

Def B.55 *Die Arkustangensfunktion*

$$f(x) = \arctan x$$

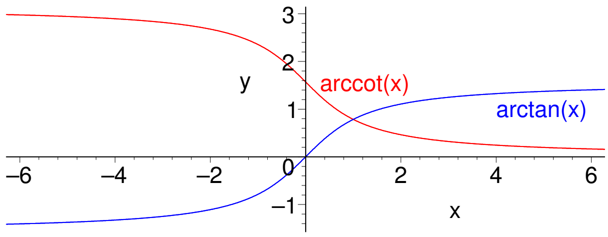
ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *beschränkten Tangensfunktion.*

Die Arkuskotangensfunktion

$$f(x) = \operatorname{arccot} x$$

ist die Umkehrfunktion der auf das Intervall $(0, \pi)$ *beschränkten Kotangensfunktion.*

Bsp B.56 Funktionsgraphen der Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion



Satz B.57 (Eigenschaften der Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion)

	$\arctan x$	$\operatorname{arccot} x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertebereich	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(0, \pi)$
Symmetrie	*ungerade*	*keine*
Nullstellen	$x_0 = 0$	*keine*
Monotonie	*streng monoton wachsend*	*streng monoton fallend*

B.10 Hyperbel- und Areafunktionen

Literatur: [Pap1, Kap. III.13]

Die Hyperbelfunktionen treten vereinzelt in Anwendungen auf.

Def B.58 *Die Definitionsgleichungen der Hyperbelfunktionen lauten*

Sinus hyperbolicus: $\sinh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,

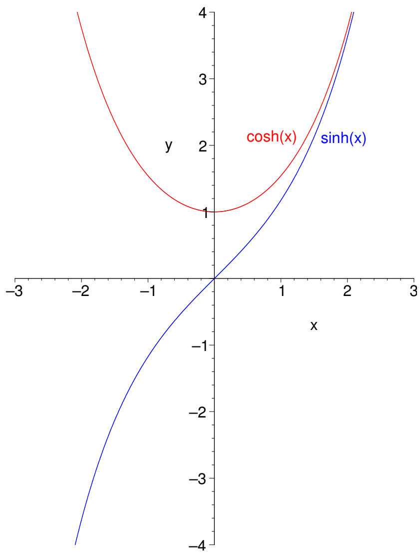
Kosinus hyperbolicus: $\cosh x := \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$,

Tangens hyperbolicus: $\tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$,

Kotangens hyperbolicus: $\coth x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

Deren Umkehrfunktionen sind die Areafunktionen $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$ *und* $\operatorname{arcoth} x$.

Bsp B.59 Funktionsgraphen von $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$.



Satz B.60 (Eigenschaften der Hyperbelfunktionen)

1. *Darstellung der Exponentialfunktionen:*

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \cosh x + \sinh x \\ \mathrm{e}^{-x} &= \cosh x - \sinh x \end{aligned}$$

2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

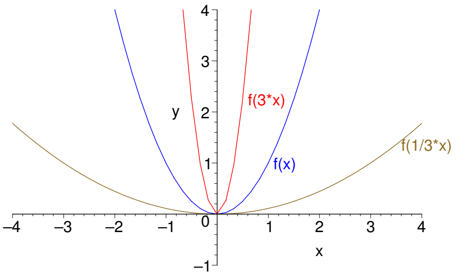
3. *Additionstheoreme:*

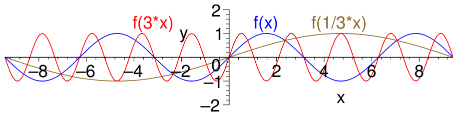
$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \end{aligned}$$

B.11 Einfache Transformationen einer Funktion

Bsp B.61 (Strecken und Stauchen in horizontale Richtung)

$f(x) = x^2$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \sin x$

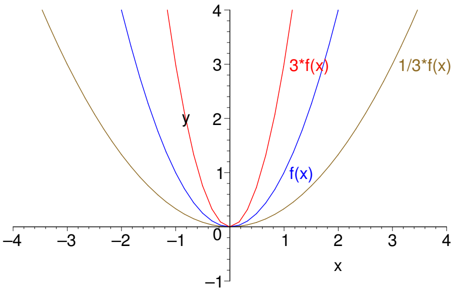


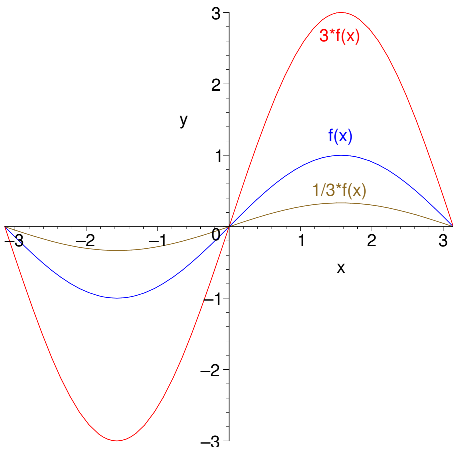


Graphische Darstellung von $f(x)$, $f(3x)$ und $f(\frac{1}{3}x)$.

Bsp B.62 (Strecken und Stauchen in vertikale Richtung)

$f(x) = x^2$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \sin x$

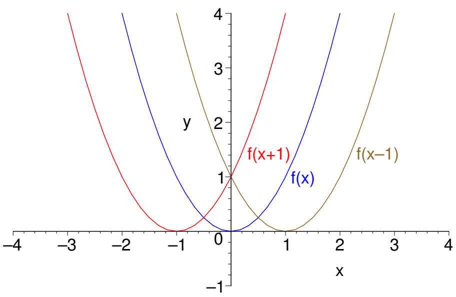


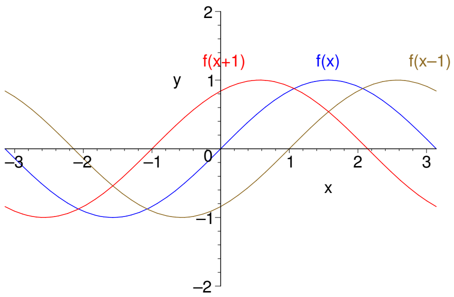


Graphische Darstellung von $f(x)$, $3f(x)$ und $\frac{1}{3}f(x)$.

Bsp B.63 (Verschieben in horizontale Richtung)

$f(x) = x^2$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \sin x$

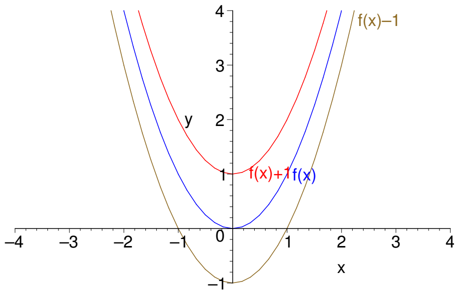




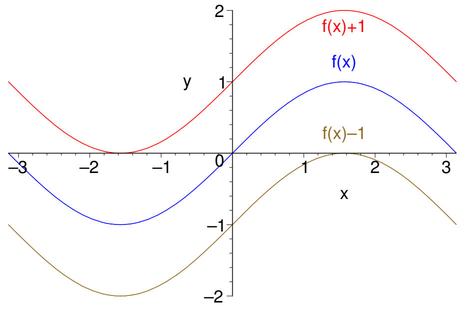
Graphische Darstellung von $f(x)$, $f(x+1)$ und $f(x-1)$.

Bsp B.64 (Verschieben in vertikale Richtung)

$f(x) = x^2$



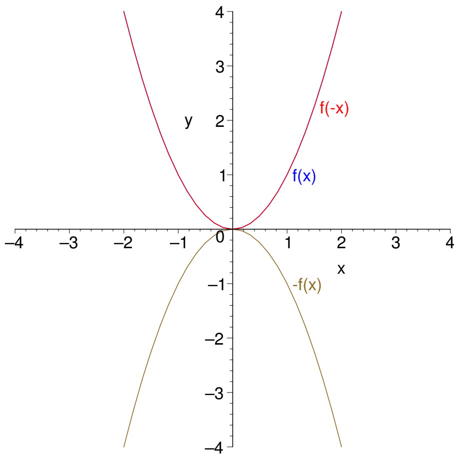
$f(x) = \sin x$



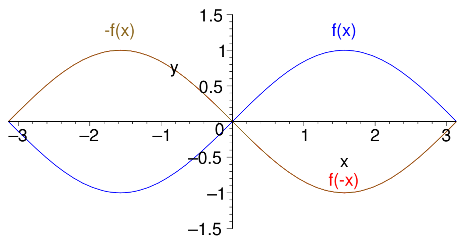
Graphische Darstellung von $f(x)$, $f(x) + 1$ und $f(x) - 1$.

Bsp B.65 (Spiegeln an der x- oder y-Achse)

$f(x) = x^2$



$f(x) = \sin x$



Graphische Darstellung von $f(x)$, $f(-x)$ und $-f(x)$.

C Theorie der Grenzwerte

Literatur: [Pap1, III.4.1]

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit unendlichen Prozessen beschäftigen. Einige davon haben Sie schon kennengelernt: das Prinzip der vollständigen Induktion in Abschnitt A.1.2 und die Konstruktion der reellen Zahlen in Abschnitt A.2.4 sowie ein Iterationsverfahren (speziell das Newtonverfahren) in Abschnitt B.3.

C.1 Zahlenfolgen

Bsp C.1 Die reellen Zahlen werden als unendliche Dezimalbrüche eingeführt. Ein quadratisches Feld mit einer Seitenlänge von 1 km hat eine Diagonale der Länge $\sqrt{2}$ km. Diese Länge finden Sie aber auf keinem Maßband. Wenn Sie ein Rohr entlang der Diagonale durch Ihr Feld legen wollen, können Sie nicht $\sqrt{2}$ km Rohr kaufen. Sie werden vielleicht 1,5 km Rohr kaufen, oder, wenn es teuer ist, 1,42 km. Ihr Nachbar ist vielleicht ein wenig pingeliger und kauft 1.415 Meterstücken und ist damit noch genauer an der exakt benötigten Länge dran.

Zwei Beobachtungen sind an dem Beispiel wesentlich:

1. Wir können den Messprozess fortsetzen und immer genauere Näherungswerte für die Länge konstruieren: 1,4142 km, 1,41422 km, 1,414214 km, 1,4142136 km, $\ldots$. Jede weitere Messung steuert eine neue Dezimale zur Maßzahl bei.

2. Wenn wir uns eine Toleranz für die Messung vorgeben, sind wir mit unseren Zahlen irgendwann innerhalb des Toleranzbereichs und verlassen diesen nicht mehr.

Bsp C.2 In Beispiel B.16 haben wir eine näherungsweise Lösung der Gleichung

$$2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36 = 0$$

mit Hilfe des Newtonverfahrens konstruiert. Wie im Beispiel C.1 konnten wir den tatsächlichen Wert durch Fortsetzen der Iteration beliebig annähern, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.85\ldots$, $x_2 = 0.9890\ldots$, $x_3 = 0.99992\ldots$, $x_4 = 0.999999995\ldots$. Auch hier trifft die zweite der obigen Beobachtungen zu. Wenn wir mit unserer Iteration einmal innerhalb einer vorgegebenen Toleranz sind, bleiben wir dort.

Bsp C.3 Angenommen, es gibt eine Bank, bei der ein Zinssatz von 100% angeboten wird. Wenn wir einen Euro (1 €) Kapital anlegen, haben wir nach 1 Jahr 2 €. Wenn wir uns die Zinsen allerdings nach einem halben Jahr auszahlen lassen (0,5 €) und die nunmehr verfügbaren 1,5 € anlegen, haben wir nach einem Jahr 2,25 € Kapital.

Warum eigentlich nicht öfter Zinsen auszahlen lassen? Nach 4 Monaten bekommen wir 33 Cent, die wir sofort wieder anlegen. Dann bekommen wir nach 8 Monaten $133/3 = 44$ Cent ausgezahlt, so dass wir am Ende des Jahres noch einmal $177/3 = 59$ Cent Zinsen bekommen. Unser Guthaben ist auf $177 + 59 = 236$ Cent angewachsen.

Kann man mit dieser Methode ein Vermögen verdienen? Nehmen wir an, wir haben n Auszahltermine, dann erzielen wir so am Ende $(1 + \frac{1}{n})^n$ Euro (inclusive unseres Anfangsguthabens).

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
10	2,593 74
100	2,704 81
1.000	2,716 92
10.000	2,718 15
100.000	2,718 27
1.000.000	2,718 28

Def C.4 *Unter einer Zahlenfolge versteht man eine geordnete abzählbar unendliche Menge (reeller) Zahlen. Symbolisch schreibt man*

$$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Die Zahlen a_1, a_2,... heißen Glieder der Folge. Die Zahl a_n ist das n-te Glied der Folge.

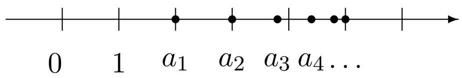
Bem C.5 Eine Zahlenfolge kann auch als Funktion aufgefasst werden, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, $a_n = f(n)$. Kann man f angeben, spricht man von einem *Bildungsgesetz*.

Bsp C.6

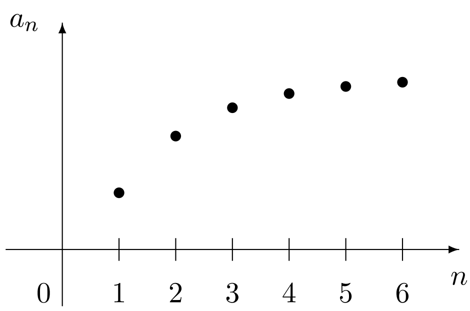
$$\begin{array}{ll} \langle a_n \rangle = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots & \text{Bildungsgesetz: } a_n = \frac{1}{2n} \\ \langle a_n \rangle = 1, 4, 9, \ldots & \text{Bildungsgesetz: } a_n = n^2 \end{array}$$

Bem C.7 Möglichkeiten der graphischen Darstellung,
siehe auch http://www.mathe-online.at/galerie/grenz/grenz.html:

- 1D



- 2D



Ü C.8 *Die rekursiv definierte Zahlenfolge $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ beschreibt ein einfaches biologisches Fortpflanzungsmodell. Man plotte die Werte für einen beliebigen Startwert $x_0 \in (0,1)$. Dabei verwende man die folgenden Werte von a: (a) 0,5 (b) 2,0 (c) 3,3 (d) 3,8. Benutzen Sie zum Beispiel* http://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/folgen/.

Def C.9 *Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt*

monoton wachsend, wenn $a_i \le a_j$ für $i < j$,

monoton fallend, wenn $a_i \ge a_j$ für $i < j$,

streng monoton wachsend, wenn $a_i < a_j$ für $i < j$,

streng monoton fallend, wenn $a_i > a_j$ für $i < j$.

nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl M gibt, so dass $a_n \le M$ für alle n,

nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl m gibt, so dass $a_n \ge m$ für alle n.

Bsp C.10 $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt.

Ü C.11 http://www.mathe-online.at/materialien/Petra.Grell/files/Monotonie_von_Folgen_-_Puzzle.htm

Def C.12 *Eine Zahl g heißt Grenzwert oder Limes der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$, symbolisch $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ oder $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \ge n_0$ stets $|a_n - g| < \varepsilon$ gilt. Symbolisch:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |a_n - g| < \varepsilon \; \forall n \ge n_0.$$

Eine Folge mit Grenzwert Null heißt Nullfolge.

Ü C.13 http://www.mathe-online.at/materialien/Petra.Grell/files/Nullfolge_Ja_Nein.htm

Bem C.14 Wir erinnern uns an die einführenden Beispiele. Wir konnten die Toleranz ε noch so klein wählen, ab irgend einem Folgenglied a_{n_0} liegen alle Glieder innerhalb der Toleranz.

Anders betrachtet: Es liegen immer fast alle Glieder der Folge in einer ε-Umgebung des Grenzwerts.

Def C.15 *Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt konvergent, wenn sie einen endlichen Grenzwert besitzt. Andernfalls heißt sie divergent.*

Bsp C.16 Die Folgen $\langle a_n \rangle = 1, 4, 9, \ldots$ und $\langle a_n \rangle = 1, -1, 1, -1, \ldots$ sind divergente Folgen.

Die Folge $\langle a_n \rangle = (1+1)^1, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, \ldots$ ist konvergent; es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Die Folge $\langle a_n \rangle = 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$ ist konvergent; es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Prägen Sie sich diese Grenzwerte ein.

Bem C.17 Als Grenzwerte spielen auch $+\infty$ und $-\infty$ eine Rolle:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall E > 0\ \exists n_0 = n_0(E) : a_n > E\ \forall n \geq n_0,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall E < 0\ \exists n_0 = n_0(E) : a_n < E\ \forall n \geq n_0.$$

Man spricht dann von *bestimmt divergenten Folgen*.

Satz C.18 (Rechenregeln für konvergente Folgen) *Seien $\langle a_n\rangle$ und $\langle b_n\rangle$ konvergente Folgen, dann gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n,$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n : b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n : \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *falls* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ *und* $b_n \neq 0 \quad \forall n,$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|.$

Bsp C.19

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

Ü C.20 `http://www.mathe-online.at/tests/grenz/konvdiv.html`

Satz C.21 (Dreifolgensatz) *Gilt für drei Folgen $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$ und $\langle c_n\rangle$ die Beziehung*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0,$$

und sind die Grenzwerte von $\langle a_n\rangle$ und $\langle c_n\rangle$ gleich,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g,$$

dann konvergiert auch die Folge $\langle b_n\rangle$ gegen den Grenzwert g, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Bem C.22 Umgangssprachlich wird der Dreifolgensatz auch als Polizistenmethode bezeichnet.

Bsp C.23 [MV1, Bsp. 1 in Abschnitt 2.5.2] Es gilt für $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n}{n} = 0.$$

Bsp C.24 [MV1, Bsp. 3 in Abschnitt 2.5.2] Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Dazu betrachten wir die Folge mit den Gliedern $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, die für $n \geq 2$ positiv sind. Es gilt unter Verwendung des Binomischen Satzes

$$n = (a_n+1)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \ldots + a_n^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2,$$

also $n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)\,a_n^2$ bzw. $1 \geq \frac{n}{2}\,a_n^2$ und somit $0 \leq a_n^2 \leq \frac{2}{n}$. Mit dem Dreifolgensatz folgt $a_n^2 \to 0$ und darum $a_n \to 0$.

Satz C.25 *Ist eine Folge*

- *monoton wachsend und nach oben beschränkt, oder*
- *monoton fallend und nach unten beschränkt,*

dann ist sie konvergent.

Bsp C.26 [MV1, Bsp. 4 in Abschnitt 2.5.3] Die durch

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{6+6a_n}{7+a_n},$$

rekursiv definierte Folge ist beschränkt, $0 < a_n < 2$, denn

$$a_{n+1} = \frac{6+6a_n}{7+a_n} = \frac{14+2a_n}{7+a_n} - \frac{8-4a_n}{7+a_n} = 2 - 4\,\frac{2-a_n}{7+a_n} < 2, \text{ wenn } a_n < 2.$$

Die Folge ist auch monoton wachsend, denn

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{6+6a_n}{7+a_n} - a_n = \frac{6+6a_n-7a_n-a_n^2}{7+a_n} = \frac{6-a_n-a_n^2}{7+a_n} \\ &= \frac{(3+a_n)(2-a_n)}{7+a_n} > 0. \end{aligned}$$

Daher ist sie konvergent. Für den Grenzwert a gilt

$$a = \frac{6+6a}{7+a},$$

also $a = 2$ oder $a = -3$. Wegen $a_n \geq 0$ ist $a \geq 0$, also $a = 2$.

Aufg C.27 *In [MV1, Bsp. 3 in Abschnitt 2.5.3] ist vorgerechnet, dass die Folge* $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, *monoton wachsend und beschränkt, also konvergent ist. Der Grenzwert ist gleich der Eulerschen Zahl* $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$, *die auch der Grenzwert der Folge* $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ *ist, siehe [MV1, Bsp. 2 in Abschnitt 2.5.3].*

Bem C.28 In dieser Bemerkung soll kurz auf einen weiteren Begriff eingegangen werden, den wir im Beweis eines Satzes im Kapitel über Reihen benötigen.

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n > m \geq n_0$.

Wenn wir die reellen Zahlen zugrunde legen, kann man beweisen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, und umgekehrt jede Cauchy-Folge konvergiert.

Dennoch sind die Begriffe *konvergente Folge* und *Cauchy-Folge* nicht synonym. Zum Beispiel gibt es im Bereich der rationalen Zahlen Cauchy-Folgen, die keinen Grenzwert im Bereich der rationalen Zahlen haben, etwa die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

Bem C.29 Neben Zahlenfolgen können auch Funktionenfolgen betrachtet werden.

C.2 Grenzwert einer Funktion

Literatur: [Pap1, III.4.2]

Von besonderer Bedeutung für die Untersuchung reeller Funktionen ist der Begriff des Grenzwertes. Dabei wird die Frage untersucht, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion verhalten, wenn sich das Argument x einem Wert x_0 nähert.

Bsp C.30 Solche Grenzwertbetrachtungen werden zum Beispiel in folgenden Situationen benötigt.

- Gebrochen rationale Funktionen haben Definitionslücken. Wenn die Funktionswerte in der Umgebung dieser Lücken endlich bleiben, kann die Lücke behoben werden. Wenn nicht, liegt eine Polstelle vor.
- Bei der Definition der Ableitung wird die Wachstumsrate einer Größe $y = y(t)$ untersucht, die sich mit der Zeit t ändert. Die durchschnittliche Wachstumsrate im Intervall $[t, t + \Delta t]$ ist

  $$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t},$$

  die momentane Wachstumsrate (Ableitung von y nach t) zum Zeitpunkt t berechnet man als Grenzwert einer immer kleiner werdenden Intervall-Länge Δt,

  $$y'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

Def C.31 *Sei f eine Funktion, die in einer Umgebung $U(x_0)$ einer Zahl x_0 definiert ist, aber nicht notwendigerweise in x_0 selbst. Gilt für jede in $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ enthaltene und gegen x_0 konvergierende Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ stets*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g,$$

dann heißt g Grenzwert von f an der Stelle x_0. Die symbolische Schreibweise lautet

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

Bem C.32 Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet, dass x der Stelle x_0 beliebig nahe kommt, ohne sie zu erreichen.

Wichtig an der Definition ist auch, dass für jede beliebige Folge der gleiche Grenzwert erreicht werden muss. Die Glieder x_n der Folge können allesamt links oder allesamt rechts von x_0 liegen oder auch teilweise links und teilweise rechts.

Bsp C.33 Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(x - 2)}{x - 2}$$

ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert. Sie besitzt jedoch an dieser Stelle einen Grenzwert, da für $x \neq 2$ der Faktor $x - 2$ gekürzt werden kann,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x = 2.$$

Bsp C.34 Die Funktion

$$f(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

ist an der Stelle $h = 0$ nicht definiert, besitzt jedoch den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x.$$

Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert?

Ü C.35 *Untersuchen Sie* $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}$ *und* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Bem C.36 Es gibt Funktionen, die in keinem Punkt einen Grenzwert besitzen, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bsp C.37 Die *Heaviside-Funktion*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

ist der Prototyp einer Funktion mit einer Sprungstelle. Sie besitzt im Punkt $x_0 = 0$ zwar einen Funktionswert, aber keinen Grenzwert, denn für jede Folge $\langle x_n \rangle$, die nur negative Zahlen als Elemente besitzt, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} H(x_n) = 0$, während für jede Folge $\langle x_n \rangle$, die nur positive Zahlen als Elemente besitzt, $\lim\limits_{n\to\infty} H(x_n) = 1$ gilt.

Def C.38 *Sei f eine Funktion, die in einem Intervall $(x_0 - \delta, x_0)$ definiert ist ($\delta > 0$). Existiert eine Zahl g, so dass für jede in diesem Intervall enthaltene und gegen x_0 konvergierende Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ stets*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

gilt, dann heißt g linksseitiger Grenzwert von *f an der Stelle x_0. Die symbolische Schreibweise lautet*

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = g.$$

Ist f eine Funktion, die in einem Intervall $(x_0, x_0 + \delta)$ definiert ist ($\delta > 0$), und existiert eine Zahl g, so dass für jede in diesem Intervall enthaltene und gegen x_0 konvergierende Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ stets

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

gilt, dann heißt g rechtsseitiger Grenzwert von *f an der Stelle x_0. Die symbolische Schreibweise lautet*

$$\lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = g.$$

Bsp C.39 Für die Heaviside-Funktion $H(x)$ gilt

$$\lim_{x\to 0-0} H(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+0} H(x) = 1.$$

Bsp C.40 Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

Def C.41 *Sei f eine Funktion, die in einem Intervall (a, ∞) definiert ist. Existiert eine Zahl g, so dass für jede in diesem Intervall enthaltene und gegen ∞ bestimmt divergierende Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ stets*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

gilt, dann heißt g Grenzwert von f für $x \to \infty$. Die symbolische Schreibweise lautet

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g.$$

Sei f eine Funktion, die in einem Intervall $(-\infty, a)$ definiert ist. Existiert eine Zahl g, so dass für jede in diesem Intervall enthaltene und gegen $-\infty$ bestimmt divergierende Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ stets

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

gilt, dann heißt g Grenzwert von f für $x \to -\infty$. Die symbolische Schreibweise lautet

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g.$$

Bsp C.42 Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Bsp C.43 Für die Funktion $f(x) = \arctan x$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Satz C.44 (Rechenregeln für Grenzwerte) *Die reellen Funktionen f und g seien in einem Intervall (a, b) definiert, evtl. mit Ausnahme des Punktes $x_0 \in (a, b)$, und es existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Dann existieren auch die folgenden Grenzwerte, und sie können nach folgenden Regeln berechnet werden:*

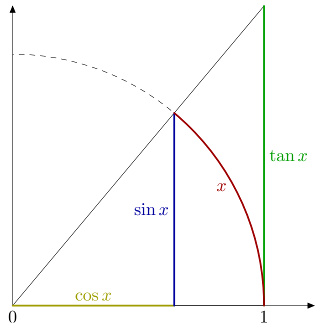
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) &= c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x), \\
\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \\
\lim_{x\to x_0} |f(x)| &= \left| \lim_{x\to x_0} f(x) \right|.
\end{aligned}$$

Beim Quotienten wird vorausgesetzt, dass der Nenner nicht Null wird.

Satz C.45 (Ein wichtiger Grenzwert) *Es gilt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Beweis Wir betrachten einen Sektor des Einheitskreises mit dem Winkel x. Diesem beschreiben wir je ein Dreieck ein und um.



Für die Flächeninhalte gilt folglich

$$\frac{1}{2}\cos x\,|\sin x|\le\frac{|x|}{2}\le\frac{1}{2}\,|\tan x|,$$

also

$$\cos x\le\left|\frac{x}{\sin x}\right|\le\frac{1}{\cos x}.$$

Für $x\to 0$ streben sowohl die linke als auch die rechte Seite gegen 1, folglich muss auch der eingeschlossene Wert gegen 1 gehen (Anwendung des Dreifolgensatzes). q.e.d.

Folgerung C.46 *Es gilt*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x.$$

Beweis Wir folgern zunächst aus dem vorangegangenen Satz, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1,$$

und damit das Zwischenergebnis

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\,\frac{\sin h}{h}-h\,\sin x\,\frac{1-\cos h}{h^2}\right)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

q.e.d.

C.3 Stetigkeit einer Funktion

Literatur: [Pap1, III.4.3]

Def C.47 *Eine Funktion f, die in einer Umgebung $U(x_0)$ einer Zahl x_0 definiert ist, heißt stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich dem dortigen Funktionswert ist,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

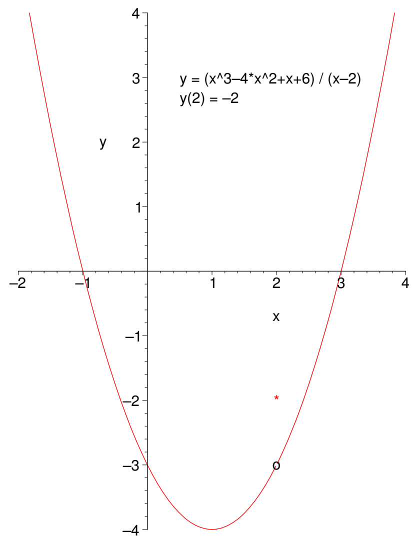
andernfalls heißt sie dort unstetig.

Eine Funktion, die in jedem Punkt eines Intervalls stetig ist, wird als in diesem Intervall stetige Funktion bezeichnet.

Folgerung C.48 *Eine Funktion ist an Definitionslücken unstetig.*

Def C.49 *Unstetigkeiten an einer Stelle x_0 kann man wie folgt klassifizieren:*

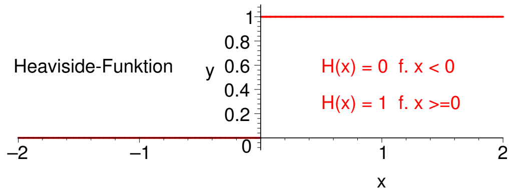
1. *Der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ist zwar vorhanden, aber von $f(x_0)$ verschieden. Dann spricht man von einer hebbaren Unstetigkeit; man könnte die Funktion im Punkt x_0 so definieren, dass die sie in x_0 stetig wird.*



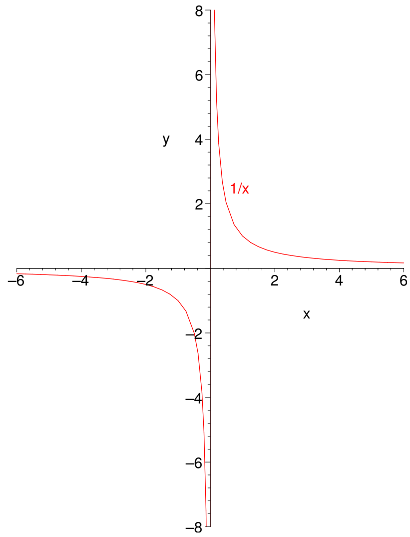
$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x-2} & \text{für } x \neq 2, \\ -2 & \text{für } x = 2. \end{cases}$$

2. *Der Grenzwert ist nicht vorhanden. Auch hier kann man wieder verschiedene Fälle unterscheiden.*

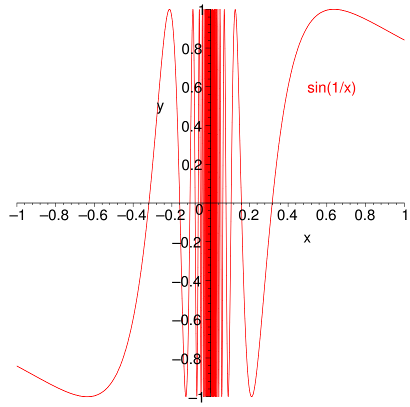
   a) *Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren und sind endlich, sind aber verschieden voneinander. Dann spricht man von einer Sprungstelle. (Beispiel: Heaviside-Funktion)*



   b) *Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind $-\infty$ oder $+\infty$. Dann handelt es sich um eine Polstelle. (Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$)*



   c) *Man kann mehrere gegen x_0 konvergierende Folgen $\langle x_n \rangle$ mit verschiedenen Grenzwerten der Folgen $\langle f(x_n) \rangle$ konstruieren. Dann handelt es sich um eine wesentliche Singularität. (Beispiel: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$)*



Ü C.50 *Untersuchen Sie alle Funktionen aus Kapitel B auf Stetigkeit und klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen.*

Bem C.51 Ebenso wie links- und rechtsseitige Grenzwerte einer Funktion f an der Stelle x_0 definiert wurden, können auch *linksseitige Stetigkeit*,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0),$$

und *rechtsseitige Stetigkeit*,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

definiert werden. Diese sind vor allem an den Grenzen abgeschlossener Intervalle von Interesse. Benötigt werden sie aber auch bei Verteilungsfunktionen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bem C.52 Es gibt auch Funktionen, die in keinem Punkt stetig sind, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wichtiger sind aber die folgenden Eigenschaften stetiger Funktionen.

Satz C.53 *Summe, Differenz und Produkt zweier stetiger Funktionen sind wieder stetig. Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist stetig an Punkten, an denen der Divisor keine Nullstelle hat. Der Absolutbetrag einer stetigen Funktion ist wieder eine stetige Funktion.*

Satz C.54 (Stetigkeit mittelbarer Funktionen) *Wenn $f(u)$ eine stetige Funktion bezüglich u ist und $u(x)$ eine stetige Funktion bezüglich x, und der Wertebereich von $u(x)$ im Definitionsbereich von $f(u)$ enthalten ist, dann ist auch die mittelbare Funktion $f(u(x))$ stetig bezüglich x und es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} u(x)\right) = f(u(x_0)).$$

Bsp C.55 Die Funktionen $\sin x + \mathrm{e}^x$, $\sin x - \mathrm{e}^x$, $\mathrm{e}^x \sin x$, $\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x}$, $|\sin x|$ und $\sin(\mathrm{e}^x)$ sind stetig.

Satz C.56 (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen) *Wenn eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist und in den Endpunkten verschiedene Werte $f(a)$ und $f(b)$ annimmt, dann existiert zu jeder zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Zahl C mindestens eine Zahl $c \in [a, b]$, so dass $f(c) = C$. (Die Funktion nimmt jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert wenigstens einmal an.)*

Folgerung C.57 (Satz von Bolzano) *Wenn eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist und die Funktionswerte in den Endpunkten verschiedene Vorzeichen besitzen, dann besitzt die Funktion f mindestens eine Nullstelle $x_0 \in [a, b]$.*

Bem C.58 Eine Anwendung dieses Satzes ist das Bisektionsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen stetiger Funktionen.

Satz C.59 (Satz von Weierstraß) *Wenn eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, dann besitzt f dort ein absolutes Maximum M und ein absolutes Minimum m, d.h., es existieren Zahlen $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, so dass $m = f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) = M$ für alle $x \in [a, b]$.*

D Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

D.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Literatur: http://www.mathe-online.at/mathint/diff2/i.html,
http://www.mathe-online.at/clips/differenzieren/index.html,
[Pap1, IV.1]

Def D.1 *Eine Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle x, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

existiert, andernfalls heißt sie dort nicht differenzierbar. Den Grenzwert bezeichnet man als (erste) Ableitung $f'(x)$.

Eine Funktion, die in jedem Punkt eines Intervalls differenzierbar ist, wird als in diesem Intervall differenzierbare Funktion bezeichnet.

Bem D.2 In geometrischer Sprache ist die Ableitung eine verallgemeinerte Steigung. Der geometrische Begriff Steigung ist ursprünglich nur für lineare Funktionen definiert, deren Funktionsgraph eine Gerade ist. Die Ableitung einer beliebigen Funktion definiert man als die Steigung einer Tangente, die man an den Funktionsgraphen anlegt, wobei dieser Graph in der Regel an verschiedenen Stellen verschiedene Tangenten hat.

In arithmetischer Sprache gibt die Ableitung einer Funktion f für jedes x an, wie sich $f(x)$ verändert, wenn sich x um einen infinitesimal kleinen Betrag ändert.

In einer klassischen physikalischen Anwendung liefert die Ableitung der Orts- oder Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit eines Teilchens.

Sei $N(t)$ die Anzahl der Atomkerne einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t. Da die Zerfallsrate $N'(t)$ proportional zur Anzahl der vorhandenen Atomkerne ist, gilt die Differentialgleichung $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$. Der Parameter λ heißt Zerfallsrate.

Ü D.3 *Untersuchen Sie die Funktionen $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|$ und*

$$f_3(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{für } x \geq 0 \\ -(-x)^{1/3} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 0$.

Bem D.4 Die erste Ableitung ist wieder eine Funktion.

Satz D.5 (Ableitungen wichtiger Funktionen)

$$\begin{array}{ll}
y(x) = const. & y'(x) = 0 \\
y(x) = ax + b & y'(x) = a \\
y(x) = x^\alpha,\ \alpha \neq 0 & y'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \\
y(x) = e^x & y'(x) = e^x \\
y(x) = \sin x & y'(x) = \cos x \\
y(x) = \cos x & y'(x) = -\sin x \\
y(x) = \ln x & y'(x) = \frac{1}{x}
\end{array}$$

Satz D.6 (Einfache Ableitungsregeln)

$$\begin{array}{ll}
\textit{Summenregel:} & [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \\
\textit{Faktorregel:} & [c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \\
\textit{Produktregel:} & [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\textit{Quotientenregel:} & \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \\
\textit{Kettenregel:} & f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{array}$$

Beweis Wir beweisen hier exemplarisch die Produkt- und die Kettenregel. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Durch Übergang zum Grenzwert für $\Delta x \to 0$ erhält man die Produktregel.

Zum Beweis der Kettenregel schreiben wir

$$\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

und überlegen uns, dass

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} = f'(g(x)).$$

q.e.d.

Ü D.7 *Beweisen Sie Summen- und Faktorregel.*

Bem D.8 Ebenso wie links- und rechtsseitige Grenzwerte einer Funktion f an der Stelle x_0 definiert wurden, können auch *linksseitige Ableitung*,

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

und *rechtsseitige Ableitung*,

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

definiert werden. Diese sind vor allem an den Grenzen abgeschlossener Intervalle von Interesse.

Bsp D.9 (Logarithmische Ableitung) Man berechne die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$.

Keine der bisherigen Ableitungsregeln ist anwendbar, da die Variable x sowohl in der Basis als auch im Exponenten auftritt. Die Lösung besteht darin, die Funktion in der Form

$$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$$

darzustellen. Diese kann mit bekannten Mitteln abgeleitet werden,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$$

Bem D.10 Jede differenzierbare Funktion ist stetig,

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} \left(h \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \right) = 0 \cdot f'(x) + f(x) = f(x),$$

aber nicht umgekehrt: die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

Die Funktion f heißt *stetig differenzierbar*, wenn ihre Ableitung f' eine stetige Funktion ist. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist ein Beispiel für eine Funktion, die stetig und differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist, denn die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig an der Stelle $x = 0$.

D.2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Literatur: [Pap1, Kap. IV], [Wes1, Kap. VI.2.5]

Def D.11 *Eine Funktion f heißt streng monoton wachsend im Punkt x_0, wenn in einer Umgebung von x_0 die Beziehungen $f(x) < f(x_0)$ für $x < x_0$ und $f(x) > f(x_0)$ für $x > x_0$ gelten.*

Eine Funktion f heißt streng monoton fallend im Punkt x_0, wenn in einer Umgebung von x_0 die Beziehungen $f(x) > f(x_0)$ für $x < x_0$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x > x_0$ gelten.

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum oder lokales Maximum, wenn in einer Umgebung von x_0 stets $f(x_0) > f(x)$ gilt ($x \neq x_0$).

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Minimum oder lokales Minimum, wenn in einer Umgebung von x_0 stets $f(x_0) < f(x)$ gilt ($x \neq x_0$).

Unter dem Begriff relative Extremwerte oder lokale Extremwerte werden die relativen Maxima und Minima zusammengefasst.

Satz D.12 *Sei f eine im Punkt x_0 differenzierbare Funktion, dann gilt:*

- *Ist $f'(x_0) > 0$, dann ist die Funktion f im Punkt x_0 streng monoton wachsend.*
- *Ist $f'(x_0) < 0$, dann ist die Funktion f im Punkt x_0 streng monoton fallend.*

Beweis Die erste Ableitung gibt den Anstieg der Kurventangente an. q.e.d.

Satz D.13 *Sei f eine im Punkt x_0 differenzierbare Funktion. Dann ist die Bedingung $f'(x_0) = 0$ eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines relativen Extremwerts an der Stelle x_0.*

Beweis Besitzt die Funktion f in x_0 ein relatives Maximum, dann ist dort die linksseitige Ableitung nicht negativ und die rechtsseitige Ableitung nicht positiv. Da bei einer differenzierbaren Funktion links- und rechtsseitige Ableitung zusammenfallen, kann diese also weder positiv noch negativ sein, also gilt $f'(x_0) = 0$. Der Beweis für das relative Minimum wird analog geführt. q.e.d.

Bem D.14 Die Definition lokaler Extremstellen in D.11 gilt auch, wenn diese am Rand des Definitionsbereichs liegen. Die notwendige Bedingung $f'(x_0) = 0$ gilt jedoch nur für lokale Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs. Dieser feine Unterschied wird durch die Voraussetzung *Sei f eine im Punkt x_0 differenzierbare Funktion.* zum Ausdruck gebracht.

Bem D.15 Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist keinesfalls hinreichend. Zum Beispiel besitzt die kubische Funktion $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ keinen relativen Extremwert, obwohl $f'(x_0) = 0$ gilt. Werte x_0, für die $f'(x_0) = 0$ gilt, heißen deshalb *extremwertverdächtig* oder *stationär*.

Def D.16 *Eine Funktion f heißt (streng) konvex im Punkt x_0, wenn die Kurve im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Linkskrümmung besitzt, d. h., wenn sich ihre Tangente beim Durchgang durch diesen Punkt im Gegenuhrzeigersinn dreht.*

Eine Funktion f heißt (streng) konkav im Punkt x_0, wenn die Kurve im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Rechtskrümmung besitzt, d. h., wenn sich ihre Tangente beim Durchgang durch diesen Punkt im Uhrzeigersinn dreht.

Wendepunkte sind Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangente ändert. Wendepunkte mit waagerechter Tangente werden auch als Sattelpunkte bezeichnet.

Bem D.17 Ist die Funktion im Punkt x_0 konvex, dann liegen in einer Umgebung von x_0 alle Sekanten oberhalb der Kurve. Ist die Funktion im Punkt x_0 konkav, dann liegen in einer Umgebung von x_0 alle Sekanten unterhalb der Kurve.

Satz D.18 *Sei f eine im Punkt x_0 zweimal differenzierbare Funktion, dann gilt:*

- *Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist die Funktion f im Punkt x_0 konvex.*
- *Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist die Funktion f im Punkt x_0 konkav.*

Beweis Die Eigenschaft $f''(x_0) > 0$ bedeutet nach dem vorherigen Satz, dass der Anstieg der Kurve im Punkt x_0 monoton wächst. Das ist gleichbedeutend mit einer sich im Gegenuhrzeigersinn drehenden Tangente. q.e.d.

Satz D.19 *Sei die Funktion f zweimal stetig differenzierbar und gelte*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0.$$

Dann besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert. Für $f''(x_0) > 0$ liegt ein relatives Minimum vor, für $f''(x_0) < 0$ dagegen ein relatives Maximum.

Beweis Man überlegt sich, dass die Funktion f bei einem relativen Minimum konvex und bei einem relativen Maximum konkav sein muss. q.e.d.

Bsp D.20 Man bestimme die relativen Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

Es gilt:

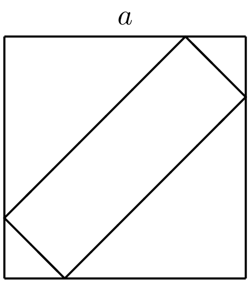
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{-x} - x^2\,\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}, \\ f''(x) &= (2-2x)\,\mathrm{e}^{-x} - (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x} = (2 - 4x + x^2)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Extremwertverdächtig (stationär) sind folglich die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Weil $f''(x_1) = 2$ ist, liegt bei $x_1 = 0$ ein lokales Minimum vor. Andererseits gilt $f''(x_2) = -2\,\mathrm{e}^{-2}$, so dass bei $x_2 = 2$ ein lokales Maximum vorliegt.

Bem D.21 Ist eine Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, dann kann man das (globale) Maximum/Minimum der Funktion über die relativen Maxima/Minima bestimmen. Ist die Funktion nicht überall definiert, müssen noch die Randpunkte des Definitionsbereichs untersucht werden.

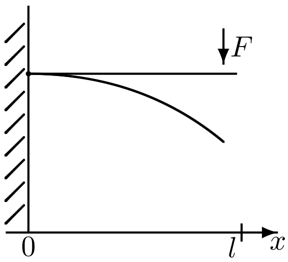
Ü D.22 *Man studiere die Anwendungsaufgaben in [Pap1, Kap. IV.3.4].*

(a)



Einem Quadrat mit vorgegebener Seitenlänge a ist ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Seiten parallel zu den Flächendiagonalen des Ausgangsquadrats verlaufen. Welches Rechteck hat den größten Flächeninhalt?

(b)

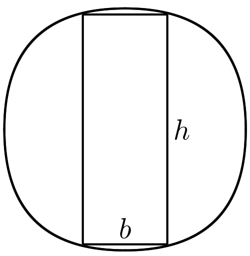


Die Biegelinie $y(x)$ eines einseitig eingespannten und am freien Ende durch eine Kraft F auf Biegung beanspruchten Balkens der Länge l lautet

$$y(x) = \frac{F}{2EI}\left(lx^2 - \frac{1}{3}x^3\right), \quad 0 \leq x \leq l.$$

An welcher Stelle des Balkens ist die Durchbiegung am größten?

(c)



Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R) soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt so herausgeschnitten werden, dass sein Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6}bh^2$$

den größtmöglichen Wert annimmt.

Satz D.23 *Sei f eine im Punkt x_0 zweimal differenzierbare Funktion. Dann ist die Bedingung $f''(x_0) = 0$ eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines Wendepunkts an der Stelle x_0.*

Beweis In einem Wendepunkt ändert sich der Drehsinn der Tangente, d. h., die zweite Ableitung ändert ihr Vorzeichen. q.e.d.

Bem D.24 Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ ist keinesfalls hinreichend. Die zweite Ableitung kann auch Null werden, ohne das Vorzeichen in der Umgebung zu ändern. Zum Beispiel besitzt die Funktion $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$ keinen Wendepunkt, obwohl $f''(x_0) = 0$ gilt.

Satz D.25 *Sei die Funktion f dreimal stetig differenzierbar und gelte*

$$f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0.$$

Dann besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt. Gilt zusätzlich

$$f'(x_0) = 0,$$

handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Beweis Die Bedingung $f'''(x_0) \neq 0$ sichert, dass die zweite Ableitung in x_0 nicht nur verschwindet, sondern auch das Vorzeichen ändert. Damit ändert sich der Drehsinn der Tangente, d. h., es liegt ein Wendepunkt vor.

Der zweite Teil des Satzes folgt aus der Definition des Sattelpunkts. q.e.d.

Bsp D.26 Die kubische Funktion $f(x) = x^3$ besitzt in $x_0 = 0$ einen Sattelpunkt.

Ü D.27 *Man bestimme die Wendepunkte der Funktion $x^2 \mathrm{e}^{-x}$. Handelt es sich um Sattelpunkte?*

Bem D.28 (Kurvendiskussion) Wir haben nun alle notwendigen Hilfsmittel zur Hand, um charakteristische Kurvenpunkte und Merkmale des Verlaufs einer Kurve zu bestimmen. Die *Kurvendiskussion* kann nach folgendem Schema erfolgen.

1. Definitionsbereich, Definitionslücken,
2. Symmetrie (gerade/ungerade),
3. Nullstellen,
4. Polstellen,
5. relative Extremwerte (Maxima/Minima),
6. Wendepunkte, Sattelpunkte
7. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$,
8. Wertebereich der Funktion,
9. Zeichnen der Funktion in einem geeigneten Maßstab.

Beispiele findet man in [Pap1, Kap. IV.3.5].

D.3 Sätze der Differentialrechnung, L'Hospitalsche Regel

Literatur: [Wes1, Kap. VI.2.7] [Pap1, Kap. VI.3.3.3]

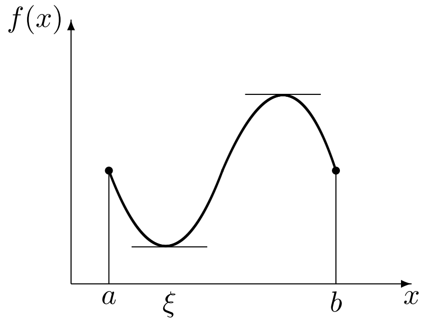
Satz D.29 (Satz von Rolle) *Ist die Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und im offenen Intervall (a,b) differenzierbar und gilt*

$$f(a) = f(b),$$

dann existiert (mindestens) eine Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

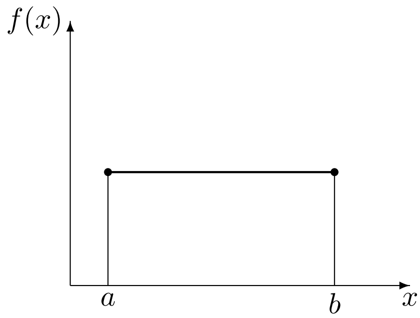
Bem D.30 Anschaulich besagt der Satz, dass eine Funktion mit $f(a) = f(b)$ (und den im Satz genannten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften) im Inneren des Intervalls mindestens eine Stelle mit waagerechter Tangente besitzt.



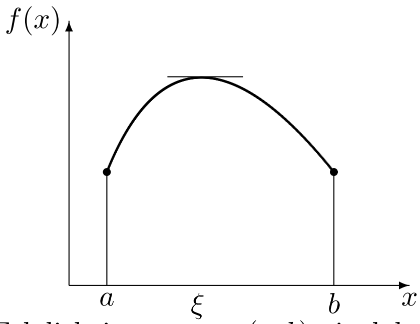
Beweis Da die Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig ist, nimmt sie nach dem Satz von Weierstraß (siehe Abschnitt 3.3) dort ihr absolutes Maximum M und ihr absolutes Minimum m an, d.h., es existieren Zahlen $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$, so dass $m = f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) = M$ für alle $x \in [a,b]$.

Wir unterscheiden nun drei Fälle.

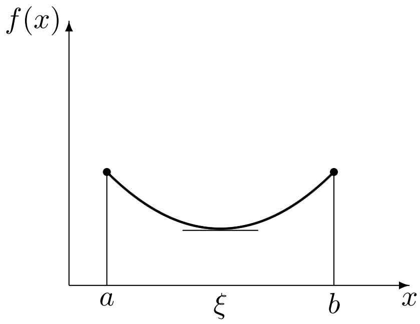
$m = f(a) = f(b) = M$**:** Die Funktion f ist konstant in $[a,b]$. Alle Punkte des Intervalls erfüllen die Behauptung des Satzes.



$m \leq f(a) = f(b) < M$**:** Folglich ist $x_{\max} \in (a,b)$ ein lokales Maximum, für das, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, $f'(x_{\max}) = 0$ gilt.



$m < f(a) = f(b) \leq M$**:** Folglich ist $x_{\min} \in (a,b)$ ein lokales Minimum, für das $f'(x_{\min}) = 0$ gilt.

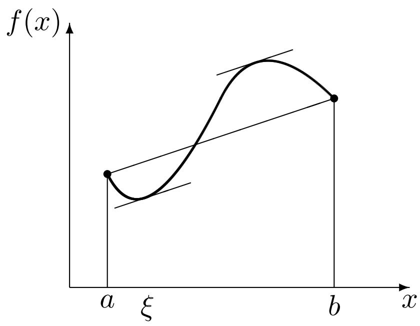


Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

Satz D.31 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Ist die Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und im offenen Intervall (a,b) differenzierbar, dann existiert (mindestens) eine Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$ mit der Eigenschaft*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bem D.32 Anschaulich besagt der Satz, dass der Graph einer Funktion, die die Bedingungen des Satzes erfüllt, an mindestens einer Zwischenstelle eine Tangente besitzt, die parallel zur Sekante zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft.



Beweis Die durch

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

definierte Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle: F ist stetig und differenzierbar mit $F(a) = F(b) = f(a)$. Folglich gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Folgerung D.33 (Andere Form des Mittelwertsatzes) *Ist die Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[x_0, x_0+h]$ stetig und im offenen Intervall (x_0, x_0+h) differenzierbar, dann existiert eine Zahl $\delta \in (0,1)$, so dass*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\delta h). \tag{1}$$

Beweis Nach dem Mittelwertsatz existiert für $a = x_0$ und $b = x_0+h$ eine Stelle $\xi \in (x_0, x_0+h)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

d. h.,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(\xi).$$

Wir schreiben ξ in der Form $\xi = x_0 + \delta h$, wobei die Eigenschaft $\xi \in (x_0, x_0+h)$ in $\delta \in (0,1)$ übergeht. q.e.d.

Satz D.34 (L´Hospitalsche Regel für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$) *Seien f und g differenzierbare Funktionen und gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$, dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Beweis Wir wenden den Mittelwertsatz in der Form (1) auf f und g an. Dann folgt mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \frac{f(x_0) + hf'(x_0+\delta_f h)}{g(x_0) + hg'(x_0+\delta_g h)} = \frac{f'(x_0+\delta_f h)}{g'(x_0+\delta_g h)}.$$

Durch Grenzübergang $h \to 0$ folgt die Behauptung. q.e.d.

Bsp D.35

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Bem D.36 Zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion ist ebenfalls ein Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$ zu berechnen. Es sei betont, dass dieser im Rahmen des inneren logischen Aufbaus der Mathematik zunächst ohne Benutzung der L'Hospitalschen Regel zu berechnen ist. Erst wenn die Ableitung einmal (ein für allemal) hergeleitet ist, kann man sie im Rahmen der L'Hospitalschen Regel benutzen.

Satz D.37 (L'Hospitalsche Regel für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$) *Seien f und g differenzierbare Funktionen und gelte*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Beweis Wir führen diesen Fall auf den vorherigen zurück:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2.$$

Nach Division folgt die Behauptung. q.e.d.

Bsp D.38 [MV1, Beispiel 2 aus Abschnitt 3.2.4] Die Molwärme eines zweiatomigen Gases ist bei festem Volumen als Funktion der absoluten Temperatur T gegeben durch

$$c(T)=R\,\frac{\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\mathrm{e}^{T_0/T}}{\left(\mathrm{e}^{T_0/T}-1\right)^2}$$

mit der Gaskonstanten R und einer charakteristischen Temperatur T_0. Es interessieren die Grenzwerte $T\to 0$ und $T\to\infty$. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir $x:=T_0/T$. Mit Hilfe der L'Hospitalsche Regel erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to 0+0}c(T) &= \lim_{x\to\infty}R\,\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(e^x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to\infty}R\,\frac{2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x}{2(e^x-1)\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty}R\,\frac{2x+x^2}{2(e^x-1)}\\
&= \lim_{x\to\infty}R\,\frac{2+2x}{2e^x}\\
&= \lim_{x\to\infty}R\,\frac{2}{2e^x}=0,\\
\lim_{T\to\infty}c(T) &= \lim_{x\to 0+0}R\,\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(e^x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 0+0}R\,\frac{2x+x^2}{2(e^x-1)}\\
&= \lim_{x\to 0+0}R\,\frac{2+2x}{2e^x}=R.
\end{aligned}$$

Bsp D.39 Es gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Die Regel von L'Hospital versagt hier, denn der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

existiert nicht. Deshalb ist der Nachsatz *„falls dieser Grenzwert existiert"* in Satz D.34 bzw. D.37 wichtig. Man darf nicht fälschlicherweise schlussfolgern, dass dann auch der Ausgangsgrenzwert nicht existiert.

Bem D.40 Für die Behandlung von unbestimmten Ausdrücken der Form $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 oder 1^∞ sei auf die Literatur verwiesen.

D.4 Das Differential

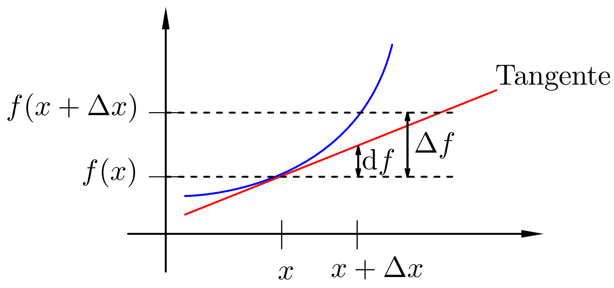
Literatur: [Pap1, IV.2.9]

Def D.41 *Sei $f(x)$ eine Funktion einer Veränderlichen, dann ist*

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

das totale oder vollständige Differential.

Bem D.42 Das Differential beschreibt die Änderung des Funktionswerts auf der in $(x, f(x))$ errichteten Tangente an die Kurve von $f(x)$.



Bei einer Koordinatenänderung $\Delta x = \mathrm{d}x$ erhält man eine Funktionswertänderung Δf auf der Funktionskurve und eine Funktionswertänderung $\mathrm{d}f$ auf der Kurventangente. Für kleine Werte von $\mathrm{d}x \equiv \Delta x$ gilt $\Delta f \approx \mathrm{d}f$.

Bsp D.43 Wir betrachten $f(x) = x^2 + \mathrm{e}^{x-1}$, $x = 1$ und $\Delta x = \mathrm{d}x = 0.1$. Die Funktionswertänderung auf der Funktionskurve ist

$$\Delta f = f(1.1) - f(1) = 2.3152 - 2 = 0.3152,$$

während die Funktionswertänderung auf der Kurventangente wegen $f'(x) = 2x + \mathrm{e}^{x-1}$ gleich

$$\mathrm{d}f = f'(1) \cdot 0.1 = 0.3$$

ist. Die Differenz $\Delta f - \mathrm{d}f = 0.0152$ ist klein im Vergleich zu $\Delta f = 0.3152$.

Bem D.44 Aus der Beziehung $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ ziehen wir den Schluss, dass die Ableitung einer Funktion als Quotient zweier Differentiale aufgefassst werden kann,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Dies rechtfertigt die Bezeichnung *Differentialquotient* für die Ableitung einer Funktion.

So kann man sich auch die Kettenregel merken. Ist $u = g(x)$ und $y = f(u)$, dann ist $du = g'(x)\,\mathrm{d}x$ und

$$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Oder in anderer Schreibweise:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

E Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

E.1 Unbestimmte Integrale und deren Berechnung

E.1.1 Definition und einfache Integrationsregeln

Literatur: [Pap1, Kapitel V]

Def E.1 *Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f, wenn $F' = f$ gilt. Die Menge aller Stammfunktionen zu f heißt unbestimmtes Integral von f. Man schreibt*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Funktion $f(x)$ unter dem Integralzeichen heißt Integrand, die Variable x ist die Integrationsvariable.

Satz E.2 (Eigenschaften des unbestimmten Integrals)

1. *Zwei beliebige Stammfunktionen zu einer Funktion f unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Ist F_0 eine beliebige Stammfunktion zu f, so ist*
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F_0(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$
Dabei heißt C Integrationskonstante.

2. *Es gilt*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x).$$

3. *Ist $f(x) = g(x)$, dann ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x$ im Sinne der Mengen aller Stammfunktionen.*

4. *Für beliebige Funktionen f, g und reelle Zahlen α, β gilt die Linearitätseigenschaft*
$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bsp E.3 (Stammfunktionen elementarer Funktionen)

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$,

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad$ (nicht definiert für $x = 0$),

3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C, \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

4. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C,$

6. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C, \qquad \int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C.$

Weitere Beispiele findet man in jeder Formelsammlung.

Aufg E.4 *Machen Sie sich mit der Tabelle der Stammfunktionen in Ihrer Formelsammlung vertraut!*

Satz E.5 (Umkehrung der logarithmischen Ableitung) *Es gilt:*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C.$$

Beweis Ist $f(x) > 0$, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ist hingegen $f(x) < 0$, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(-f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Man kann das zu der für alle $f(x) \neq 0$ gültigen Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

zusammenfassen. Durch Integration folgt die Behauptung. q.e.d.

Ü E.6 (Anwendung des Satzes) *Man berechne*

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3} \,\mathrm{d}x$, *(b)* $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x$, *(c)* $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x$.

Satz E.7 (Partielle Integration) *Sind $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbare Funktionen, dann gilt*

$$\int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x.$$

Beweis Aus der Produktregel der Differentiation, $(uv)' = u'v + uv'$, folgt $uv' = (uv)' - u'v$. Durch unbestimmte Integration erhält man die Behauptung. q.e.d.

Ü E.8 (Partielle Integration) *Man berechne*

(a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, *(b)* $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$, *(c)* $\displaystyle\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$, *(d)* $\displaystyle\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

Die Beispiele (a) und (c) sind typische Anwendungen der partiellen Integration, wo es gelingt, polynomiale Faktoren zu eliminieren.

E.1.2 Integration gebrochen rationaler Funktionen, Partialbruchzerlegung

Satz E.9 (Partialbruchzerlegung, einfache reelle Nullstellen)
Sei $f(x) = p(x)/q(x)$ eine echt gebrochen rationale Funktion ohne hebbare Unstetigkeiten (p und q seien teilerfremd), wobei

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

n einfache reelle Nullstellen besitze. Dann führt der Ansatz

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

zu einer eindeutigen Zerlegung von $f(x)$ in Partialbrüche der Form $A_k/(x - x_k)$.

Bem E.10 Damit wissen wir auch, wie Funktionen $f(x)$, die den Voraussetzungen des Satzes genügen, integriert werden, denn es gilt

$$\int \frac{A_k}{x - x_k} \,\mathrm{d}x = A_k \ln|x - x_k| + C.$$

Statt Satz E.9 zu beweisen, wollen wir ein Beispiel angeben.

Bsp E.11 Für

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

bestimmt man die Nullstellen des Nennerpolynoms, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, und wählt den Ansatz nach unserem Satz,

$$f(x) = \frac{3x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2}.$$

Um A_1 und A_2 zu berechnen, bildet man den Hauptnenner,

$$\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2} = \frac{A_1(x - 2) + A_2(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

und vergleicht den Zähler mit $3x - 1$. Es muss

$$A_1(x - 2) + A_2(x - 1) = 3x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

gelten. Zur Bestimmung der Konstanten führt man nun entweder einen Koeffizientenvergleich durch, oder man setzt spezielle Werte für x ein:

$$\begin{aligned} x = 1: \quad A_1(1 - 2) &= 3 - 1 \implies A_1 = -2, \\ x = 2: \quad A_2(2 - 1) &= 6 - 1 \implies A_2 = 5. \end{aligned}$$

Also gilt

$$f(x) = \frac{-2}{x - 1} + \frac{5}{x - 2}.$$

Bem E.12 Ist $f(x)$ eine unecht gebrochen rationale Funktion, überführt man sie zunächst mittels Polynomdivision in die Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

Bsp E.13

$$\int \frac{x^2 + 1}{x - 1} \,\mathrm{d}x = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x - 1} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x - 1| + C$$

Bem E.14 (Wiederholung) Der *Hauptsatz der Algebra* besagt, dass jedes Polynom n-ten Grades,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

genau n (reelle oder komplexe) Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ besitzt und sich als Produkt

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

schreiben lässt. Sind einige der Nullstellen gleich, so spricht man von einer entsprechenden Vielfachheit der Nullstellen. Sind die Nullstellen $x_1, \ldots, x_m$ paarweise voneinander verschieden und besitzt x_i die Vielfachheit r_i, $i = 1, \ldots, m$, dann gilt entsprechend

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2}\cdots(x - x_m)^{r_m}.$$

Satz E.15 (Partialbruchzerlegung, mehrfache reelle Nullstellen)
Sei $f(x) = p(x)/q(x)$ eine echt gebrochen rationale Funktion ohne hebbare Unstetigkeiten. Dann ist eine r-fache reelle Nullstelle x_1 von $q(x)$ durch den Ansatz

$$\frac{B_1}{x - x_1} + \frac{B_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x - x_1)^r}$$

zu berücksichtigen. Die Berechnung der Konstanten erfolgt wie oben.

Bsp E.16 (Partialbruchzerlegung, doppelte reelle Nullstelle) Sei

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}.$$

Das Nennerpolynom besitzt die einfache Nullstelle $x_1 = 1$ und die doppelte Nullstelle $x_2 = 2$. Für die Partialbruchzerlegung wählen wir daher den Ansatz

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{A(x-2)^2 + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Den Zähler vergleicht man nun mit $2x^2 + 3x + 1$,

$$A(x-2)^2 + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1) = 2x^2 + 3x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen spezielle Werte für x ein,

$$\begin{array}{lrcll} x = 1: & A(1-2)^2 & = & 2+3+1 & \Longrightarrow \quad A = 6, \\ x = 2: & B_2(2-1) & = & 8+6+1 & \Longrightarrow \quad B_2 = 15, \\ x = 0: & 6(-2)^2 + B_1(-1)(-2) + 15(-1) & = & 1 & \Longrightarrow \quad B_1 = -4. \end{array}$$

Folglich ist

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{6}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{15}{(x-2)^2}.$$

Ü E.17 (Integration der Partialbrüche) *Wie lautet das unbestimmte Integral der Funktion aus dem Beispiel? (Das sollte man ohne Integraltafel ausrechnen können.)*

Bem E.18 (komplexe Nullstellen) Ist eine Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten echt komplex, sagen wir $x_1 = a+b\,\mathrm{i}$, dann ist die entsprechende konjugiert komplexe Zahl $x_2 = \overline{x_1} = a - b\,\mathrm{i}$ ebenfalls eine Nullstelle von $p(x)$, wobei die Vielfachheiten von x_1 und x_2 übereinstimmen. Man kann die Rechnung mit komplexen Zahlen vermeiden, wenn man die entsprechenden Faktoren in obiger Produktdarstellung gemeinsam betrachtet,

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - (a + b\,\mathrm{i}))(x - (a - b\,\mathrm{i})) = (x - a)^2 + b^2 = x^2 + px + q$$

mit den reellen Koeffizienten $p = -2a$ und $q = a^2 + b^2$.

Satz E.19 (Partialbruchzerlegung, komplexe Nullstellen) *Bei komplexen Nullstellen des Nennerpolynoms $q(x)$ führen folgende Ansätze zu einer Zerlegung der echt gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ in Partialbrüche.*

1. *Für zwei einfache konjugiert komplexe Nullstellen x_1 und x_2 lautet der Partialbruchansatz*
$$\frac{Bx + C}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}.$$
Auf diese Weise vermeidet man die Rechnung mit komplexen Zahlen.

2. *Entsprechend lautet der Ansatz für r-fache konjugiert komplexe Nullstellen*
$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{B_rx + C_r}{(x^2 + px + q)^r}.$$

Die Berechnung der Konstanten erfolgt wie oben.

Ü E.20 (Integration der Partialbrüche) *Wie lauten die Stammfunktionen der im Satz auftretenden Funktionen? Verwenden Sie ggf. Ihre Integraltafel.*

Bem E.21 (Allgemeines Schema) Das allgemeine Schema zur Integration gebrochen rationaler Funktionen $f(x)$ lautet also wie folgt:

1. Polynomdivision zur Darstellung von $f(x)$ als Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochen rationalen Funktion,
$$f(x) = r(x) + \frac{p(x)}{q(x)}.$$

2. Bestimmung der Nullstellen von $q(x)$ und deren Vielfachheit. Falls eine Nennernullstelle auch Nullstelle des Zählerpolynoms ist, werden die entsprechenden Linearfaktoren gekürzt (Behebung von Definitionslücken).

3. Ansatz für die Partialbruchzerlegung entsprechend der in den Sätzen diskutierten Fälle.

4. Bestimmung der in den Partialbrüchen auftretenden Konstanten durch Bilden des Hauptnenners und
   - Koeffizientenvergleich, der i. Allg. auf die Lösung eines Gleichungssystems für die Konstanten führt, oder
   - Einsetzen spezieller Werte für x.

   Kombinationen beider Methoden sind ebenso möglich wie ein Koeffizientenvergleich nach Differenzieren.

5. Integration sämtlicher Partialbrüche.

E.1.3 Integration durch Substitution

Satz E.22 (Substitutionsmethode) *Ist $x = \varphi(t)$, dann gilt*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis Wir zeigen, dass die Ableitung nach t beider Seiten gleich ist. Für die linke Seite gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Das ist genau die Ableitung der rechten Seite. q.e.d.

Bem E.23 Dieser Satz lässt sich oft zur Vereinfachung von Integralen anwenden. Man geht in folgenden Schritten vor:

1. Aufstellen der Substitutionsgleichung $x = \varphi(t)$. Dabei ist zu beachten, dass sich nur monotone Funktionen φ eignen, also solche, für die $t = \varphi^{-1}(x)$ eindeutig definiert ist, vgl. Schritt 5.
2. Berechnung des *Differentials* $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Substitution im Integral:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t.$$
4. Berechnung des Integrals:
$$\int g(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C.$$
5. Rücksubstitution
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Ü E.24 (Substitution) *Man berechne*

(a) $\displaystyle\int x\cos x^2\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Bem E.25 In der Wahl einer geeigneten Substitution steckt viel Erfahrung. Möglicherweise führen verschiedene Substitutionen zum Ziel, manchmal muss man verschiedene Substitutionen probieren, bis eine zum Ziel führt. In jeder Formelsammlung findet man Empfehlungen, zum Beispiel

1. $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t$ mit der Substitution $t = ax+b$,

2. $\displaystyle\int f(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}f^2(x) + C$ mit $t = f(x)$,

3. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$ mit $t = f(x)$,

4. $\displaystyle\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int R(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ mit $\mathrm{e}^x = t$.

   Ist $R(\cdot)$ eine rationale Funktion, dann ist der neue Integrand wieder rational, und das Integral kann durch Partialbruchzerlegung berechnet werden.

5. $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ mit $t = \tan\frac{x}{2}$,
   denn es gilt:

$$\begin{aligned} 1+t^2 &= 1+\tan^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}, \\ \frac{2t}{1+t^2} &= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x, \\ \frac{1-t^2}{1+t^2} &= \left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x \end{aligned}$$

   und wegen $x = 2\arctan t$

$$\mathrm{d}x = 2\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Ist $R(\cdot)$ eine rationale Funktion, dann ist der neue Integrand wieder rational.

6. $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x = \int R(a\sin t, a\cos t)a\cos t\,\mathrm{d}t$ mit $x = a\sin t$.

   Dieser Integrand wurde im vorherigen Punkt behandelt.

7. $\displaystyle\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}\,\mathrm{d}t$ mit $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

   Die Umrechnung des Differentials erfolgt über $x = \frac{t^n-b}{a}$, woraus $\mathrm{d}x = \frac{nt^{n-1}}{a}\,\mathrm{d}t$ folgt. Auch hier gilt: Ist $R(\cdot)$ eine rationale Funktion, dann ist der neue Integrand wieder rational.

Ü E.26 (Anwendung der Substitutionsempfehlungen) *Man berechne*

(a) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$, *(b)* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, *(d)* $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

Bem E.27 (Zusammenfassung und Ausblick)

1. Vermittelt wurden die Stammfunktionen wichtiger Funktionen und grundlegende Integrationstechniken.

2. Viele Stammfunktionen sind tabelliert. Man übe das Lesen von Tabellen.

3. Integrale können auch mit Computeralgebrasystemen berechnet werden. Beispiel mit `maple11`:

$int(\sin(x), x)$

$$-\cos(x) \tag{1}$$

$int(x \cdot \exp(x), x)$

$$(-1+x)\,e^x \tag{2}$$

$int\left(\frac{x^2+1}{x-1}, x\right)$

$$\frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln(-1+x) \tag{3}$$

$int\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}, x\right)$

$$-4\ln(x-2) - \frac{15}{x-2} + 6\ln(-1+x) \tag{4}$$

$int\left(\frac{1}{\mathrm{sqrt}(1-x^2)}, x\right)$

$$\arcsin(x) \tag{5}$$

$int\left(\frac{\sin(x)}{x}, x\right)$

$$\mathrm{Si}(x) \tag{6}$$

4. Dennoch gibt es Funktionen, die nicht geschlossen integrierbar sind, z. B.

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \int e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Als Auswege bieten sich an:

- Integration durch Reihenentwicklung des Integranden,
- numerische Integration (vor allem für bestimmte Integrale),
- Definition neuer Funktionen über das Integral

$$\mathrm{Si}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

E.2 Bestimmtes Integral als Grenzwert

E.2.1 Definition

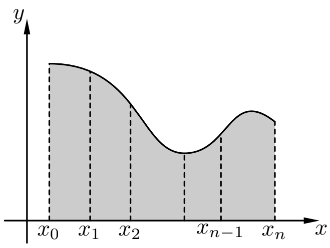
Literatur: [Pap1, V.2]
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/riemann/
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/innsbruck/integration2d/

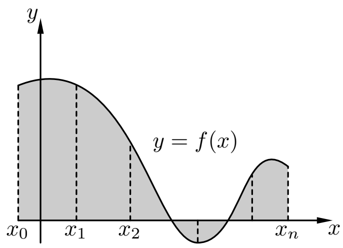
Def E.28 *Sei f eine über dem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion. Unter dem bestimmten Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und $b > a$ versteht man die Zahl, die man auf folgende Weise erhält:*

1. *Das Intervall $[a,b]$ wird durch Einfügen von Punkten*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

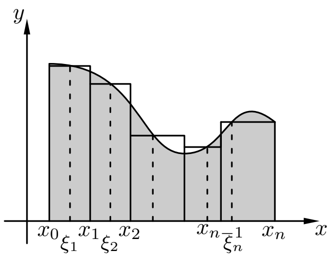
   in n Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ mit den Längen $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ zerlegt, $k = 1, \ldots, n$. Die Länge des größten Teilintervalls wird mit $h_n := \max_k |\Delta x_k|$ bezeichnet.

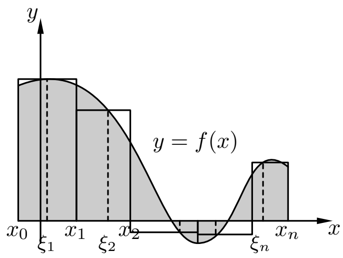




2. *Wir wählen in jedem Teilintervall einen beliebigen Punkt $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ und bilden die Summe*

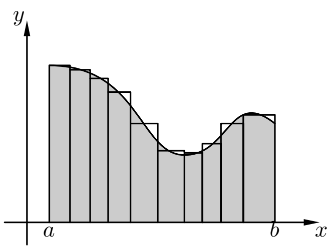
$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

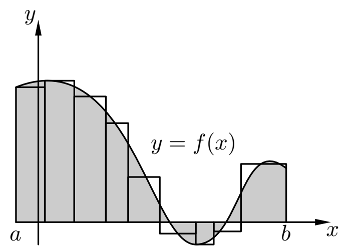


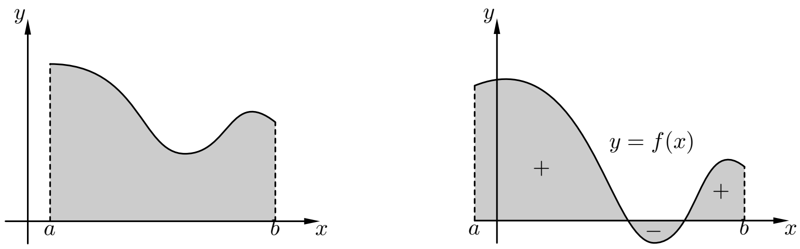


3. *Man berechnet den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ für den Fall $h_n \to 0$. Falls dieser Grenzwert existiert und von der Wahl der Zahlen x_i und ξ_i unabhängig ist, nennt man ihn das bestimmte Integral und schreibt dafür*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$







Man nennt das Symbol $\int$ das Integralzeichen, die Zahl a untere Integrationsgrenze, die Zahl b obere Integrationsgrenze, die Funktion f den Integranden, x die Integrationsvariable und $\mathrm{d}x$ das Integrationsdifferential.

Bem E.29

1. Ist f stetig, dann existiert der Grenzwert. Es ist aber auch ausreichend, dass f stückweise stetig und auf $[a, b]$ beschränkt ist.

2. Der Wert des Integrals hängt von a, b und f ab, aber nicht von der Wahl der Integrationsvariablen,
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z.$$

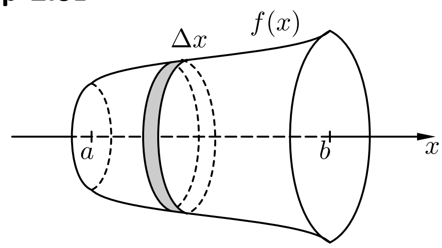
3. Ist $a > b$, dann muss man die Definition modifizieren, denn dann ist
$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = b.$$
Da dann $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ negativ ist, erhält man
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Der Wert des Integrals entspricht der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse, wobei oberhalb der x-Achse liegende Teilflächen positiv und unterhalb liegende negativ gezählt werden. Um den tatsächlichen Flächeninhalt zu bestimmen, muss man $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ berechnen. Dazu muss man die Nullstellen von f bestimmen. Das werden wir in einem späteren Abschnitt genauer betrachten.

Bsp E.30 (Berechnung eines bestimmten Integrals nach Definition) Zu berechnen sei $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. Da der Integrand stetig ist, wissen wir, dass das Integral existiert und wir können speziell die Unterteilung in Intervalle gleicher Länge wählen,
$$x_k = \frac{k}{n}, \quad \Delta x_k = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$
Außerdem wählen wir $\xi_k := x_k$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

E.2.2 Volumen eines Rotationskörpers

Bsp E.31



Die über dem Intervall $[a, b]$ gelegene Kurve der Funktion $f(x)$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.

Zur Bestimmung des Volumens legen wir durch den Rotationskörper Schnitte senkrecht zur x-Achse, die den Körper in Scheiben der Dicke Δx zerlegen. Das Volumen der Scheibe beträgt etwa

$$\Delta V = Q(\xi)\Delta x.$$

Dabei bezeichnet $Q(\xi)$ den Flächeninhalt der Querschnittsfläche in einem beliebigen Zwischenpunkt ξ des betrachteten Intervalls der Länge Δx. Nach dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ erhält man zunächst

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta V = \int_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x,$$

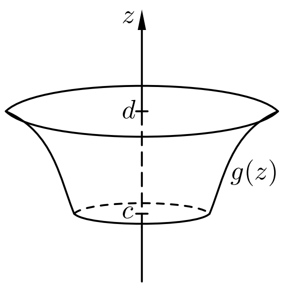
und folglich mit $Q(x) = \pi[f(x)]^2$ die bekannte Formel

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Ü E.32

1. *Welches Integral ist zu lösen, um das Volumen des Rotationsparaboloids zu berechnen, das bei Rotation von $f(x) = \sqrt{2px}$, $x \in [0, h]$, um die x-Achse entsteht.*
2. *Man berechne mit den Mitteln dieses Abschnitts das Volumen einer Kugel mit dem Radius r.*

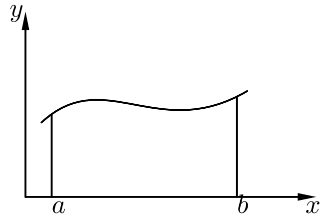
Bem E.33 Ist die Rotationsachse nicht mit x bezeichnet, muss man die Integrationsvariable entsprechend anpassen.



$$V = \pi \int_c^d [g(z)]^2\,\mathrm{d}z.$$

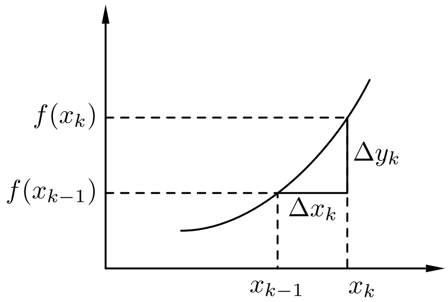
E.2.3 Bogenlänge einer ebenen Kurve

Bsp E.34



Gegeben sei die Kurve der Funktion $f(x)$, wobei $x \in [a, b]$.

Um die Länge der Kurve zu berechnen, zerlegt man das Intervall in Teilintervalle der Länge Δx und berechnet die Länge des Polygonzugs.



Für kleine Teilintervalle kann das Bogenstück Δs durch

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \\ &= \Delta x_k \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \end{aligned}$$

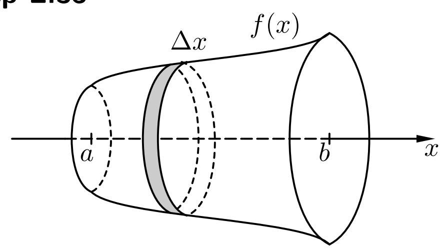
approximiert werden.

Durch Summieren und Grenzübergang erhält man

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

E.2.4 Mantelfläche eines Rotationskörpers

Bsp E.35



Die über dem Intervall $[a, b]$ gelegene Kurve der Funktion $f(x)$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper.

Zur Bestimmung der Mantelfläche M_x legen wir durch den Rotationskörper Schnitte senkrecht zur x-Achse, die den Körper in Scheiben der Dicke Δx zerlegen. Die Mantelfläche einer Scheibe beträgt etwa $2\pi f(\xi)\Delta s$, wobei Δs wie im vorherigen Abschnitt die Länge des Kurvenstücks bezeichnet. Nach dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ erhält man

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ü E.36 *Man berechne mit den Mitteln dieses Abschnitts die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r. Welches Integral ist zu lösen?*

Bem E.37 Ist die Rotationsachse nicht mit x bezeichnet, muss man die Integrationsvariable entsprechend anpassen.

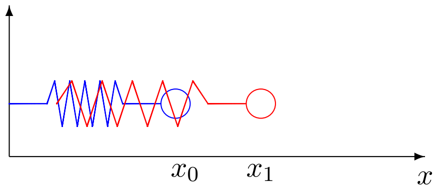
E.2.5 Arbeits- und Energiegrößen

Bsp E.38 Ein Massepunkt werde durch eine wegabhängige Kraft $F(x)$ von x_0 nach x_1 bewegt. Die dabei verrichtete Arbeit ist

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die skalare Kraft kann auch als Komponente eines Kraftvektors in x-Richtung aufgefasst werden.

Ü E.39 *Um eine elastische Feder aus der Gleichgewichtslage heraus um die Strecke s zu dehnen, ist nach dem Hookeschen Gesetz die Kraft $F(x) = kx$ nötig, wobei k die Federkonstante bezeichnet und sich die Gleichgewichtslage bei $x = 0$ befindet.*



Man bestimme die dabei verrichtete Arbeit.

E.3 Berechnung bestimmter Integrale

Satz E.40 (Rechenregeln für bestimmte Integrale)

1. *Für beliebige Zahlen a, b und c gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *Für beliebige Funktionen f und g und für beliebige reelle Zahlen α und β gilt*

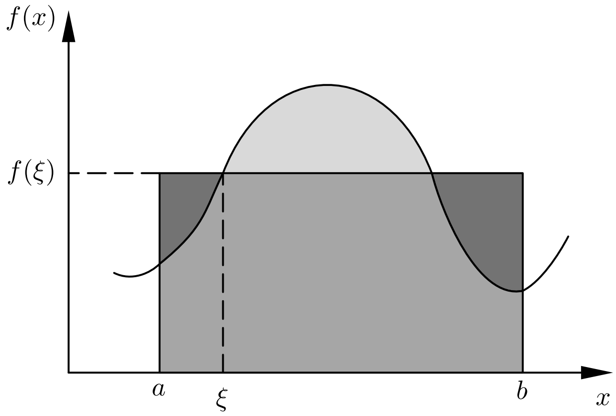
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. *Gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Der Beweis kann über die Rückführung auf Summen geführt werden.

Satz E.41 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Ist der Integrand f auf $[a,b]$ stetig, dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$, so dass*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot f(\xi). \tag{2}$$



Beweis Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie Minimum und Maximum an,

$$f(x_{\min}) := \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x_{\max}) := \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Nach Regel 3 des vorherigen Satzes gilt folglich

$$(b-a)f(x_{\min}) \le I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le (b-a)f(x_{\max}).$$

Das Integral I ist also eine Zahl zwischen $(b-a)f(x_{\min})$ und $(b-a)f(x_{\max})$. Da f stetig ist und nach dem Zwischenwertsatz somit alle Werte zwischen $f(x_{\min})$ und $f(x_{\max})$ annimmt, muss es auch eine Zahl ξ zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$ geben, für den $(b-a)\cdot f(\xi) = I$ gilt. q.e.d.

Bem E.42 Den Mittelwertsatz benötigen wir zum Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, der die Verbindung zwischen unbestimmtem und bestimmtem Integral herstellt und die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Stammfunktion erlaubt.

Satz E.43 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F eine Stammfunktion zu f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Beweis Wir definieren für $t \in [a,b]$ die Funktion

$$I(t) := \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

und zeigen, dass I eine Stammfunktion von f ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} I(t+h) - I(t) &= \int_a^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= hf(\xi_h) \end{aligned}$$

mit $\xi_h \in (t, t+h)$, wobei wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung angewandt haben. Somit erhalten wir

$$I'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{I(t+h) - I(t)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(t).$$

Die Funktion I ist tatsächlich eine Stammfunktion von f.

Für jede andere Stammfunktion F existiert eine Konstante C, so dass

$$F(x) = I(x) + C \quad \forall x \in [a,b].$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [I(b) + C] - [I(a) + C] \\ &= I(b) - I(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

q.e.d.

Bsp E.44 (Berechnung eines bestimmten Integrals mit dem Hauptsatz)
Zu berechnen sei $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. Die Funktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion zum Integranden $f(x) = x$. Es gilt:

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$

Man schreibt das im Allgemeinen in der Form

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$

Bem E.45 Auch bestimmte Integrale können mit `maple` berechnet werden:

```
int(x, x = 0..1)
```

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 x \, dx$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

Die Eingabe der Integrale wird mit jeder neuen Version komfortabler.

Bem E.46 Ist f eine komplizierte Funktion, dann kann das Integral analytisch gar nicht oder nur mit viel Aufwand berechnet werden. Eine Alternative sind Näherungsverfahren. Eines dieser Verfahren, die *zusammengesetzte Rechteckregel*, ergibt sich aus der Definition des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx s_n.$$

Im einfachsten Fall wählt man äquidistante Punkte x_k, $k = 0, \ldots, n$ und für ξ_k

(a) den linken Randpunkt, $\xi_k = x_{k-1}$, oder

(b) den rechten Randpunkt, $\xi_k = x_k$, oder

(c) den Intervallmittelpunkt $\xi_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$.

Diese Verfahren werden im Rahmen der Vorlesung *Mathematische Modellierung und numerische Methoden im Bauingenieurwesen* im zweiten Studienjahr vertieft. Die Java-Applets von Dan Slaughter, http://math.furman.edu/~dcs/java/NumericalIntegration.html, dienen der Illustration.

E.4 Uneigentliche Integrale

Bem E.47 Bisher wurde bei der Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

stets vorausgesetzt, dass Integrationsbereich und Integrand beschränkt sind. Bei uneigentlichen Integralen werden diese Voraussetzungen verletzt.

Uneigentliche Integrale spielen bei der Lösung von Differentialgleichungen und in der Statistik eine wichtige Rolle.

Def E.48 (Unbeschränkter Integrationsbereich) *Es wird definiert:*

(a) $$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{B\to\infty}\int\limits_a^B f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(b) $$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(c) $$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}}\int\limits_A^B f(x)\,\mathrm{d}x.$$

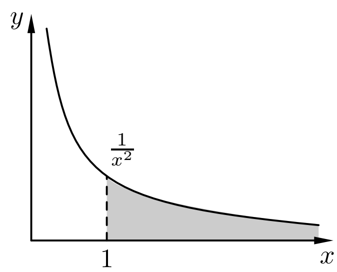
Im letzten Fall streben die Zahlen A und B unabhängig voneinander gegen $-\infty$ bzw. ∞. Falls dieser Grenzwert nicht existiert, aber der Grenzwert

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x,$$

dann nennt man letzteren Hauptwert des uneigentlichen Integrals.

Bsp E.49 (Unbeschränkter Integrationsbereich)

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ (d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{d}x$



Def E.50 (Polstellen des Integranden)

(a) *Falls $f(a) = \pm\infty$ gilt, aber $f(x)$ in $(a, b]$ stetig ist, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert.

(b) *Falls $f(b) = \pm\infty$ gilt, aber $f(x)$ in $[a, b)$ stetig ist, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert.

(c) *Falls $f(c) = \pm\infty$ in einer Zwischenstelle $c \in (a, b)$ gilt, aber $f(x)$ in $[a, c)$ und $(c, b]$ stetig ist, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

definiert. Dabei streben die Zahlen ε und δ unabhängig voneinander gegen Null. Existiert die rechte Seite von (3) nicht, und existiert jedoch

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right],$$

dann nennt man diesen Wert den Hauptwert des uneigentlichen Integrals.

Bsp E.51 (Polstelle des Integranden)

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Bem E.52 Nicht über singuläre Stellen hinweg integrieren!

Bsp E.53 (Fehler durch Nichtbeachten singulärer Stellen)

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x-1}\bigg|_0^2 = -1 - 1 = -2$$

Hier kann etwas nicht stimmen, denn der Integrand ist positiv, aber der Integralwert negativ. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0} \int_{1+\delta}^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{1+\delta}^2 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-\frac{1}{-\varepsilon} - \left(-\frac{1}{-1}\right)\right] + \lim_{\delta\to 0} \left[-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{\delta}\right)\right] = \infty.
\end{aligned}$$

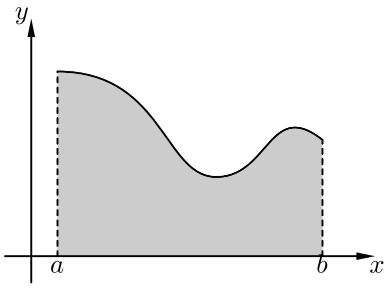
E.5 Weitere Anwendungen des bestimmten Integrals

Literatur: [Pap1, V.10]

E.5.1 Flächenberechnung

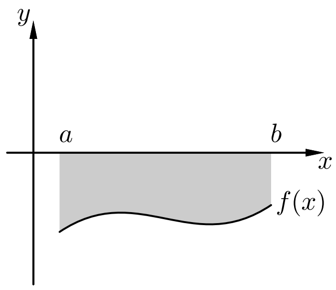
Bsp E.54

Fall 1: $f(x) \geq 0$ **in** $[a, b]$



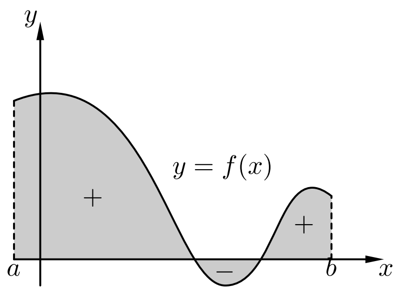
$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Fall 2: $f(x) \leq 0$ **in** $[a, b]$



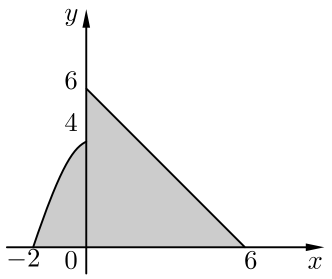
$$A = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Fall 3: $f(x)$ **wechselt das Vorzeichen**



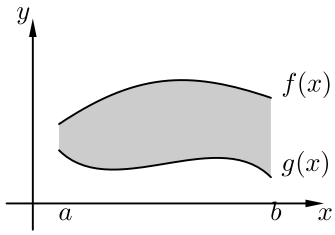
1. Nullstellen, die zwischen a und b liegen, berechnen.
2. Teilintegrale berechnen.
3. Beträge der Teilintegrale summieren.

Fall 4: $f(x)$ **unstetig**



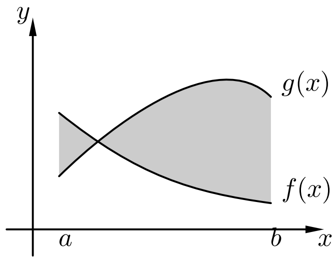
Teilflächen berechnen und addieren.

Fall 5: Fläche zwischen den Kurven von $f(x)$ und $g(x)$, wobei $f(x) \geq g(x)$



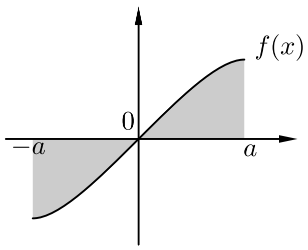
$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

Fall 6: Fläche zwischen zwei sich schneidenden Kurven

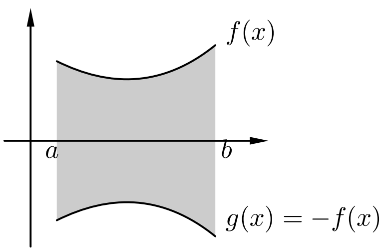


1. In $[a, b]$ liegende Schnittstellen von f und g berechnen.
2. Teilintegrale analog Fall 5 berechnen.
3. Beträge der Teilintegrale summieren.

Fall 7: Ausnutzen der Symmetrie



$$A = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$A = 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ü E.55

1. *Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von*

$$f(x) = -2x^2 + 10x - 8$$

und der x-Achse in den Grenzen von -1 und 3 zu berechnen.

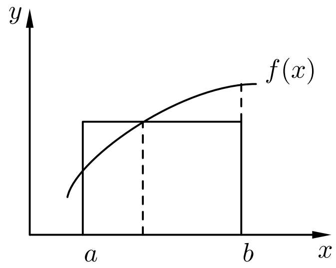
2. *Es ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{für } x < 0 \\ 6 - x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

und der x-Achse mit den Nullstellen als Grenzen zu berechnen.

E.5.2 Mittelwerte

Bsp E.56



Die Fläche unter der Kurve von $f(x)$ kann laut Mittelwertsatz der Integralrechnung durch ein flächengleiches Rechteck dargestellt werden,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Die Zahl

$$y_{\mathrm{m,arith}} = f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

heißt *(arithmetischer) Mittelwert* bzw. kurz *arithmetisches Mittel* der Funktion f im Intervall $[a,b]$. Er ist die Verallgemeinerung des für n Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ definierten arithmetischen Mittelwerts

$$\overline{y} = \frac{y_1+\ldots+y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Bem E.57 Es gibt weitere Mittelwerte, wie zum Beispiel das *quadratische Mittel*

$$y_{\mathrm{m,quadr}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x}.$$

Zum Beispiel ist der Effektivwert I_{eff} eines Wechselstroms

$$I = I(t) = I_0\sin(\omega t)$$

so definiert, dass ein Gleichstrom der Stärke I_{eff} in einer halben Periode die gleiche Arbeit W leistet, wie der Wechselstrom I. Dabei wird ein konstanter Widerstand vorausgesetzt. Man erhält aus

$$W = RI_{\mathrm{eff}}^2\cdot\frac{1}{2}T = R\int_0^{\frac{1}{2}T} I^2(t)\,\mathrm{d}t$$

die Beziehung

$$I_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{1}{2}T} I^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

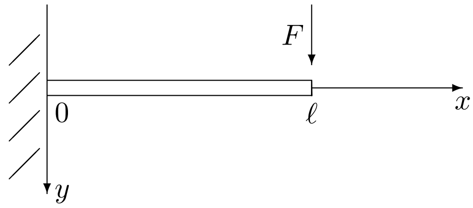
Der Effektivwert ist also ein quadratisches Mittel.

E.5.3 Schwerpunkt homogener Flächen und Körper

Wir verweisen auf die Mechanik-Vorlesung bzw. auf das noch kommende Kapitel über Doppelintegrale, in dem der Schwerpunkt auch inhomogener Flächen und Körper behandelt wird. Im Spezialfall homogener Flächen und Körper führt die Berechnung dann auf ein bestimmtes Integral.

E.5.4 Biegelinie eines einseitig eingespannten Balkens

Bsp E.58 Ein homogener Balken der Länge ℓ und konstanter Querschnittsfläche sei an einem Ende fest eingespannt. Am anderen Ende wirke eine Kraft F, die den Balken auslenkt. Die Auslenkung sei $y(x)$.



Aus der Festigkeitslehre folgt die Biegegleichung

$$y''(x) = -\frac{M_b}{EI}$$

mit dem Elastizitätsmodul E, dem Flächenmoment I des Balkenquerschnitts und dem Biegemoment M_b, für das im vorliegenden Fall

$$M_b = -F(\ell - x)$$

gilt. Damit lautet die Biegegleichung

$$y''(x) = \frac{F}{EI}(\ell - x).$$

Durch zweimaliges Integrieren erhält man die Gleichung der Biegelinie

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int \frac{F}{EI}(\ell - x)\,\mathrm{d}x = \frac{F}{EI}\left(\ell x - \frac{1}{2}x^2 + C_1\right), \\ y(x) &= \int \frac{F}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \ell x + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{F}{EI}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\ell x^2 + C_1 x + C_2\right). \end{aligned}$$

Die Konstanten bestimmen wir aus den Bedingungen $y(0) = 0$ (keine Durchbiegung am eingespannten Ende) und $y'(0) = 0$ (waagerechte Tangente am eingespannten Ende) zu

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Damit lautet die Gleichung der Biegelinie

$$y(x) = \frac{F}{6EI}(3\ell - x)x^2.$$

E.5.5 Bewegung eines Massepunktes

Bem E.59 (Vorüberlegung) Jede differenzierbare Funktion $f(t)$ lässt sich durch

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

darstellen, denn $f(t)$ ist eine Stammfunktion zu $f'(t)$.

Bsp E.60 Die Bewegung eines Massepunktes längs einer Geraden sei beschrieben durch

$$x = x(t).$$

Die Geschwindigkeit ist dann definiert durch

$$v = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Zur Bestimmung der Ortsfunktion $x(t)$ bei gegebener Geschwindigkeit $v(t)$ benötigt man eine Anfangsposition $x(t_0) = x_0$, um die Integrationskonstante zu berechnen. Man erhält

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Analog ist die Beschleunigung durch

$$\begin{aligned} a &= \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

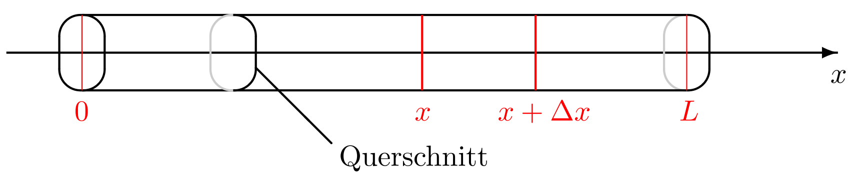
definiert. Ist die Beschleunigung $a(t)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0) = v_0$ gegeben, dann gilt analog oben

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

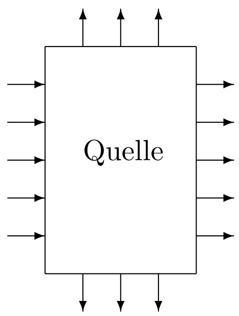
Ü E.61 *Von einem mit konstanter Beschleunigung a bewegten Massepunkt sind die Anfangsposition $x(t_0) = x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0) = v_0$ bekannt. Man bestimme das zugehörige Weg-Zeit-Gesetz.*

E.5.6 Modellierungsaufgaben

Wir betrachten die Wärmeleitung in einem dünnen Stab mit der Länge L und einem Querschnitt mit der Fläche Q und dem Umfang U. Dünn bedeutet, dass wir annehmen können, dass die Temperatur über den Querschnitt konstant ist. Damit hängt die Temperatur u nur von einer Ortsvariablen $x \in (0, L)$ ab. Wir wollen außerdem annehmen, dass ein stationärer Zustand eingetreten ist, die Temperatur also nicht mehr von der Zeit abhängt.



Zur Herleitung des Energieerhaltungssatzes betrachten wir die Wärmebilanz in einem kleinen Stabelement der Länge Δx. Folgende Terme sind zu berücksichtigen:



Links fließt ein Wärmestrom $W(x)$ in das Element ein, rechts fließt die Wärme $W(x+\Delta x)$ ab.

Über den Rand des Stabs findet ein Wärmeaustausch der Größe

$$U \int_x^{x+\Delta x} q[u(s) - u_0(s)] \, \mathrm{d}s$$

mit der Umgebung statt. Dabei bezeichnet q den Wärmeaustauschkoeffizienten und u_0 die Umgebungstemperatur.

Im Inneren des Stabs wollen wir eine Wärmequelle (z.B. elektrischen Strom) mit der Quelldichte $f(x)$ zulassen.

Daraus ergibt sich die Energiebilanz in integraler Form

$$W(x+\Delta x) - W(x) + U \int_x^{x+\Delta x} q[u(s) - u_0(s)] \, \mathrm{d}s = Q \int_x^{x+\Delta x} f(s) \, \mathrm{d}s.$$

Wir dividieren diese Gleichung durch Δx und betrachten den Grenzwert $\Delta x \to 0$. Mit

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{W(x+\Delta x) - W(x)}{\Delta x} &= W'(x), \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(s) \, \mathrm{d}s &= f(x), \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} q[u(s) - u_0(s)] \, \mathrm{d}s &= q[u(x) - u_0(x)] \end{aligned}$$

erhält man die Energiebilanz in differentieller Form

$$W'(x) + Uq[u(x) - u_0(x)] = Qf(x).$$

Für den Wärmestrom gilt nach dem Fourierschen Gesetz

$$W(x) = -Qk(x)u'(x),$$

wobei k den Wärmeleitkoeffizient bezeichnet. Setzt man dieses Gesetz in die Bilanzgleichung ein, erhält man nach Division durch Q

$$-[k(x)u'(x)]' + \tilde{q}u(x) = f(x) + \tilde{q}u_0(x), \quad \tilde{q} = qU/Q,$$

die *Wärmeleitgleichung*. Sie gilt für alle $x \in (0, L)$. An den Randpunkten $x = 0$ und $x = L$ müssen zur vollständigen Beschreibung *Randbedingungen* gegeben werden. Man schreibt entweder die Temperatur oder den Wärmestrom in diesen Punkten vor.

Literatur

[MV1] Meyberg, K. und P. Vachenauer: *Höhere Mathematik*, Band 1. Springer, Berlin, ..., 1999, 2001, 2003.

[Pap1] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 1. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, ..., 1998, 2000, 2001.

[Ri] Richter, M.: *Grundwissen Mathematik für Ingenieure.* Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2001.

[Wes1] Westermann, Th.: *Mathematik für Ingenieure*, Band 1. Springer, Berlin, 1996, 2002, 2005.