

BEITRÄGE ZUR MATERIALTHEORIE

Herausgeber: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion

Einführung in die Lineare Viskoelastizität

Einführung in die Lineare Viskoelastizität

von

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mechanik (LRT 4)
Werner-Heisenberg-Weg 39
85579 Neubiberg
Deutschland

Heft 4/07 der Reihe

Beiträge zur Materialtheorie

Herausgeber: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion

ISSN 1862-5703

Herausgeber:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion
Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Mechanik (LRT 4)
Werner-Heisenberg-Weg 39
85579 Neubiberg
Deutschland

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion:
Einführung in die Lineare Viskoelastizität
Beiträge zur Materialtheorie 4/07
Neubiberg 2007
ISSN 1862-5703

Postanschrift des Verfassers:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion
Institut für Mechanik
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München
D-85577 Neubiberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist unzulässig und strafbar. Insbesondere gilt dies für die Übersetzung, den Nachdruck sowie die Speicherung auf Mikrofilm, mit vergleichbaren Verfahren oder in Datenverarbeitungsanlagen.

Vorwort

Dieses Vorlesungsmanuskript entstand im Rahmen einer an der Universität der Bundeswehr München gehaltenen Blocklehrveranstaltung mit dem Titel „Lineare Viskoelastizität“. Das Ziel dieser Vorlesung bestand darin, den Hörern einen Einblick in die physikalischen Gedanken und mathematischen Methoden der klassischen linearen Viskoelastizitätstheorie zu vermitteln. Zur Erstellung des Manuskriptes wurde insbesondere auf die etablierten und umfassenden Lehrbücher der Autoren Arthur von Tobolsky, Bernhard Gross, Peter Haupt und Nicholas Tschoegl zurückgegriffen. Ein Anspruch auf Vollständigkeit in Bezug auf die aufgelistete Literatur besteht natürlich nicht.

Ich möchte mich ganz besonders bei Herrn Dipl.-Ing. Thomas Ranz bedanken, der durch seinen enormen persönlichen Einsatz wesentlich dazu beigetragen hat, dass diese Ausarbeitung in der vorliegenden Form entstehen konnte.

Alexander Lion, Mai 2007

Einführung in die lineare Viskoelastizität

Die Theorie der linearen Viskoelastizität ist eine grundlegende und sehr etablierte Materialtheorie, die seit vielen Jahren zur mathematischen Beschreibung der Stoffeigenschaften von Polymeren verwendet wird. Das Ziel dieser Ausarbeitung, die ein Vorlesungsskript zu einer in 2006 gehaltenen Blocklehrveranstaltung darstellt, besteht darin, dem Leser einen ersten Einblick in die Methoden und Denkweisen der linearen Viskoelastizitätstheorie zu vermitteln. Um einen vollständigen Überblick zu bekommen, wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen.

Nach einer kurzen Darstellung der wichtigsten Grundlagen werden ausgehend von eindimensionalen aus linear elastischen Federn und viskosen Dämpfern aufgebauten rheologischen Modellen die Begriffe Relaxations- und Kriechfunktion sowie komplexer Modul und komplexe Nachgiebigkeit eingeführt. Auf dieser Basis wird der Begriff der thermomechanischen Konsistenz erläutert, wozu der zweite Hauptsatz der Thermodynamik für isotherme Prozesse zugrunde gelegt wird. Darauf aufbauend werden im Sinne einer natürlichen Verallgemeinerung kontinuierliche und diskrete Relaxations- und Kriechspektren definiert und mathematische Beziehungen zwischen ihnen hergeleitet. In diesem Rahmen werden auch verallgemeinerte Viskoelastizitätsmodelle mit fraktionellen Zeitableitungen diskutiert und in einen Zusammenhang mit kontinuierlichen Relaxations- und Kriechspektren gestellt. Diese Methode bietet sich immer dann an, wenn das Materialverhalten im Zeit- oder Frequenzbereich durch Potenzgesetze beschrieben werden kann. Die eindimensionale Theorie der linearen Viskoelastizität schließt mit der Formulierung des bekannten Konzeptes der thermorheologisch einfachen Stoffe ab. Daraus werden die bekannten Zeit/Temperatur- und Zeit/Frequenz-Verschiebungsprinzipien hergeleitet, welche für die Relaxations- und Kriechfunktionen sowie für die komplexen Moduli und Nachgiebigkeiten gelten.

Aufbauend auf den in dieser Ausarbeitung diskutierten Gedanken, Modellen und Kenntnissen wird abschließend ein dreidimensionales tensorielles Materialmodell der anisotropen linearen Viskoelastizität formuliert.

Inhaltsverzeichnis

1	Literatur	7
2	Grundlagen	8
2.1	Beschreibung der Geometrie deformierbarer Körper (Kinematik)	8
2.2	Allgemeingültige Bilanzgleichungen (Naturgesetze)	9
2.3	Materialmodelle zur Beschreibung von Werkstoffeigenschaften	10
3	Allgemeine Materialgleichungen der linearen Viskoelastizität	15
4	Das Dreiparameter-Modell der linearen Viskoelastizität	18
4.1	Mathematisches Modell	18
4.2	Verhalten bei sinusförmiger dehnungsgesteuerten Beanspruchungen	23
4.3	Verhalten bei sinusförmiger spannungsgesteuerter Beanspruchung	26
4.4	Herleitung der komplexen dynamischen Materialfunktionen	28
4.5	Thermomechanische Konsistenz des Dreiparameter-Modells	29
5	Allgemeine Konzepte der linearen Viskoelastizität	31
5.1	Diskretes Relaxationsspektrum	31
5.2	Thermomechanische Konsistenz	34
5.3	Kontinuierliches Relaxationsspektrum	34
5.4	Diskretes Retardationsspektrum	35
5.5	Kontinuierliches Retardationsspektrum	37
6	Relationen zwischen den Zeit- und Frequenzbereichsfunktionen	38
6.1	Zusammenhang zwischen Zeitbereichsfunktionen	38
6.2	Dehnungsgesteuerte Anregung im Frequenzbereich	40
6.3	Spannungsgesteuerte Anregung im Frequenzbereich	42
7	Komplexer Modul für diskrete und kontinuierliche Spektren	45
7.1	Berechnung des komplexen Moduls für diskretes Relaxationsspektrum	45
7.2	Berechnung des komplexen Moduls für kontinuierliches Spektrum	45
7.3	Die Stieltjes Transformation	46
8	Komplexe Nachgiebigkeit für diskrete und kontinuierliche Spektren	48
8.1	Komplexe Nachgiebigkeit für diskretes Retardationsspektrum	48
8.2	Komplexe Nachgiebigkeit für kontinuierliches Retardationsspektrum	49
9	Beziehungen zwischen den Relaxations- und Kriechspektren	51
9.1	Überblick	51
9.2	Herleitung der Beziehungen	51
10	Viskoelastizität mit fraktionellen Ableitungen	55
10.1	Motivation	55
10.2	Das Konzept der fraktionellen Integration und Differentiation	55
10.3	Das fraktionelle Dämpfungselement	59
11	Höherwertige Modelle der fraktionellen Viskoelastizität	67
11.1	Das fraktionelle Dreiparameter-Modell	67
11.2	Ermittlung des dynamischen Moduls und der Nachgiebigkeit	68

11.3	Relaxationsspektrum des fraktionellen Dreiparameter-Modells.....	72
11.4	Reihendarstellung der Mittag Leffler Funktion	74
12	Approximation kontinuierlicher durch diskrete Spektren	77
12.1	Kumulatives Relaxationsspektrum.....	77
12.2	Approximation mit Hilfe des kumulativen Spektrums	78
13	Thermorheologisch einfache Stoffe	85
13.1	Lineare Viskoelastizität mit temperaturabhängiger Zeitskala.....	87
13.2	Verschiebungsprinzipien.....	88
13.3	Stoffeigenschaften bei unterschiedlichen Temperaturen: Masterkurve	93
14	Anisotrope lineare Viskoelastizität	95
14.1	Tensorielle dynamische Moduli und Nachgiebigkeiten.....	97
14.2	Tensorielle Relaxations- und Retardationsspektren	99
14.3	Zusammenhänge zwischen Moduli-, Nachgiebigkeiten und Spektren	101

1 Literatur

- J. Altenbach, H. Altenbach: Einführung in die Kontinuumsmechanik, Teubner Studienbücher.
- E. Becker, W. Bürger: Kontinuumsmechanik, Teubner Studienbücher.
- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure I-V, Teubner Verlag.
- A. Drozdov: Viscoelastic Structures - Mechanics of Growth and Ageing, Academic Press.
- J.D. Ferry: Viscoelastic properties of polymers, John Wiles and Sons.
- H. Grabmüller: Vorlesungsskript - Integralgleichungen, Uni Erlangen.
- B. Gross: Mathematical Structure of the Theory of Linear Viscoelasticity, Hermann Verlag.
- P. Haupt: Continuum Mechanics and Theory of Materials, Springer Verlag.
- A. Krawietz: Materialtheorie, Springer Verlag.
- W. Schmeidler: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik.
- F.R. Schwarzl: Polymermechanik, Springer Verlag.
- N.W. Tschoegl: The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Material Behaviour, Springer Verlag.

2 Grundlagen

Einführendes Beispiel: Rollender Reifen auf fester Unterlage

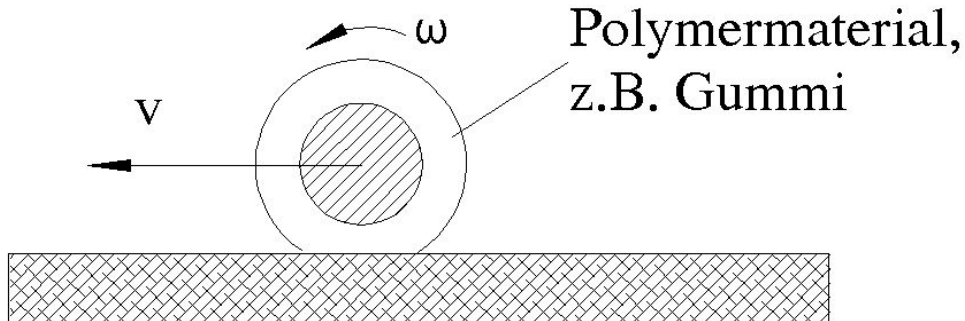


Abbildung 2-1 Rollendes Rad auf Unterlage

Gesucht: z.B. Spannungs- und Deformationsverteilung, Temperaturverteilung, etc.

Aufgabe der Kontinuumsmechanik

Berechnung der Systemeigenschaften von komplexen Strukturen unter mechanischen, thermischen oder allgemeinen thermomechanischen Beanspruchungen.

2.1 Beschreibung der Geometrie deformierbarer Körper (Kinematik)

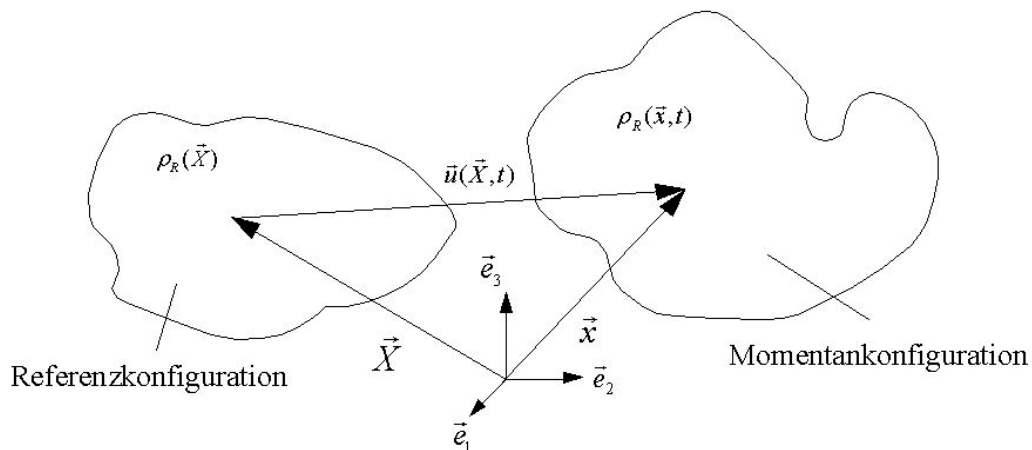


Abbildung 2-2 Referenz- und Momentankonfiguration

$\vec{u}(\vec{X}, t)$ ist der Verschiebungsvektor

$\mathbf{E}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right]$ ist der linearisierte Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right)$$

2.2 Allgemeingültige Bilanzgleichungen (Naturgesetze)

In der allgemeinen Kontinuumsmechanik gelten unabhängig von den Materialeigenschaften der betreffenden Systeme bzw. Stoffe fünf Bilanzgleichungen, die im Folgenden tabellarisch aufgelistet werden. Die bilanzierten Größen sind die Masse, der lineare Impuls, der Drehimpuls, die Energie und die Entropie. Für die mathematischen Herleitungen und Diskussionen dieser Relationen wird auf die einschlägige Fachliteratur (siehe z.B. Haupt oder Altenbach & Altenbach) verwiesen.

Massenbilanz

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \quad \vec{v} = \dot{\vec{u}} \\ \vec{v} &= v_k \vec{e}_k, \quad \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_k}{\partial X_k} \\ \frac{\partial v_k}{\partial X_k} &= \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + \frac{\partial v_2}{\partial X_2} + \frac{\partial v_3}{\partial X_3}\end{aligned}$$

ρ ist die Massendichte.

$\vec{v}$ ist das Geschwindigkeitsfeld.

Impulsbilanz

$$\rho \dot{\vec{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \vec{k}$$

$\mathbf{T} = \sigma_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k$ ist der Spannungstensor.

$\vec{k} = k_i \vec{e}_i$ ist die volumenverteilte Kraft pro Masseneinheit.

$\dot{\vec{v}}$ ist der Beschleunigungsvektor.

Komponentenschreibweise der Impulsbilanz:

$$\rho \dot{v}_k = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial X_i} + \rho k_k$$

Drehimpulsbilanz

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad \text{oder} \quad \sigma_{ki} = \sigma_{ik}$$

(Symmetrie des Spannungstensors)

Energiebilanz

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho r$$

e ist die innere Energie pro Masseneinheit.

$\vec{q}$ ist der Wärmestromvektor.

r ist eine volumenverteilte Wärmezufuhr.

$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ ist die Spannungsleistung.

Entropiebilanz

$$\rho \dot{s} = \frac{1}{\theta^2} \vec{q} \cdot \text{grad } \theta - \frac{1}{\theta} (\text{div } \vec{q} - \rho r) + \rho \gamma$$

s ist die Entropie pro Masseneinheit.

θ ist das Temperaturfeld.

γ ist die lokale Entropieproduktionsrate pro Masseneinheit aufgrund irreversibler Vorgänge.

2. Hauptsatz der Thermodynamik: $\gamma \geq 0$

Folgerung (Kombination der beiden Hauptsätze der Thermodynamik):

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{q} - \rho r &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho \dot{e} \\ \Rightarrow \rho \dot{s} &= \frac{1}{\theta^2} \vec{q} \cdot \text{grad } \theta - \frac{1}{\theta} (\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho \dot{e}) + \rho \gamma \\ \Rightarrow \rho (\theta \dot{s} - \dot{e}) &= \rho \theta \gamma - \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\theta} \vec{q} \cdot \text{grad } \theta \\ \Rightarrow \rho \theta \gamma &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho (\dot{e} - \theta \dot{s}) - \frac{1}{\theta} \vec{q} \cdot \text{grad } \theta \\ \psi &:= e - \theta s \quad \text{ist die freie Energie} \\ \dot{\psi} &= \dot{e} - \theta \dot{s} - s \dot{\theta} \\ \Rightarrow \rho \theta \gamma &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho \dot{\psi} - \rho s \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} \vec{q} \cdot \text{grad } \theta \geq 0 \end{aligned}$$

Da ρ, θ und $\gamma \geq 0$ ist, darf der letzte Ausdruck für beliebige thermomechanische Prozesse nicht negativ werden. Er wird als Clausius-Duhem-Ungleichung bezeichnet. Für isotherme Prozesse lautet die Clausius-Duhem-Ungleichung:

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \geq \rho \dot{\psi}$$

In Worten: Die Spannungsleistung ist bei beliebigen mechanischen Prozessen stets größer oder gleich der zeitlichen Änderung der im Material gespeicherten freien Energie.

Sämtliche Materialgleichungen der Kontinuumsmechanik müssen der allgemeinen Form bzw. bei isothermen Prozessen der isothermen Form der Clausius-Duhem-Ungleichung genügen. In diesem Fall werden sie als thermomechanisch konsistent bezeichnet.

2.3 Materialmodelle zur Beschreibung von Werkstoffeigenschaften

Die Materialmodelle der Mechanik stellen allgemeine mathematische Beziehungen zwischen Spannungs- und Deformationsprozessen in Form von Funktionalen her. Üblicherweise wird die Spannung als abhängige Variable und die Deformationsgeschichte als unabhängige Vari-

able aufgefasst. Bei thermomechanischen Materialmodellen kommt die Temperaturgeschichte als weitere unabhängige Variable hinzu.

- Deformationsprozess: $\mathbf{E}(s), \quad -\infty < s \leq t$
- Spannungsprozess: $\mathbf{T}(s), \quad -\infty < s \leq t$
- Materialmodell: $\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}_{-\infty < s \leq t} [\mathbf{E}(s)]$

Materialeigenschaften

Festkörper

Elastizität

Plastizität

Viskoelastizität

Viskoplastizität

Fluide

Reibungsfreies elastisches Fluid

Viskoses Fluid

Viskoelastisches Fluid

Materielle Symmetrieeigenschaften

Isotrope Stoffe: Polymere, polykristalline Metalle, ...

Anisotrope Stoffe: Einkristalle, Faserverbundwerkstoffe, Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften, z.B. durch Deformationsprozess induziert

Geometrische Zwangsbedingungen (Idealisierungen)

Starrer Körper: Deformationen sind vernachlässigbar

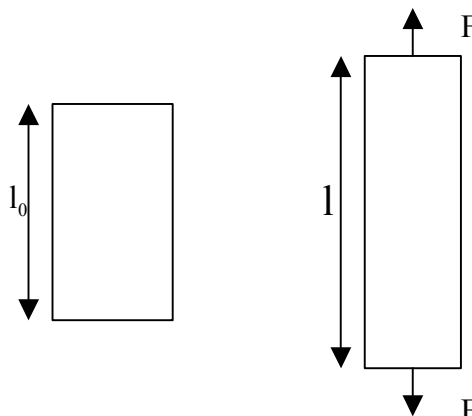
Inkompressibilität: Volumendeformationen sind vernachlässigbar, z.B. Gummi

Undehnbare Fasern: Steifigkeit der Fasern ist groß gegenüber der Steifigkeit der Matrix

Materialeigenschaften bei isothermen Beanspruchungen (eindimensional)

Spannung: $\sigma = \frac{F}{A}$

Dehnung: $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$



Dehnungskontrollierte Prozesse

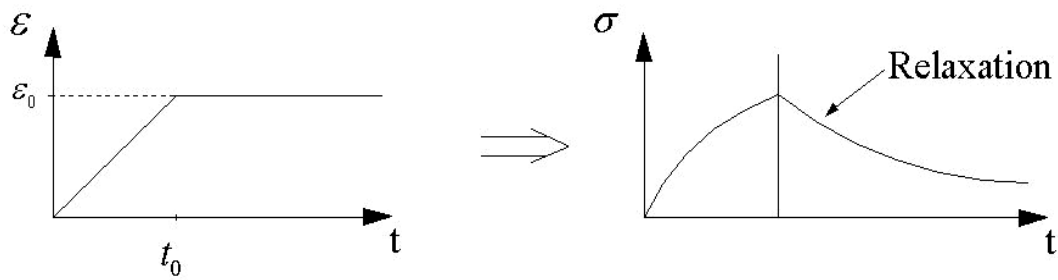


Abbildung 2-3 Dehnungskontrollierter Prozess und Spannungsantwort

Spannungskontrollierte Prozesse

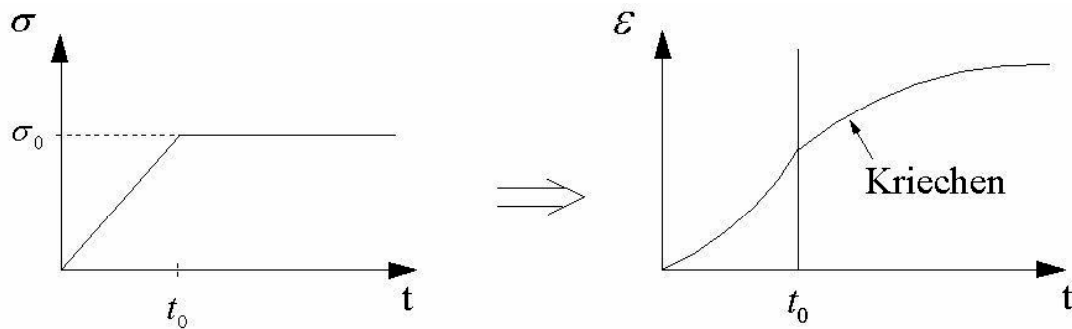
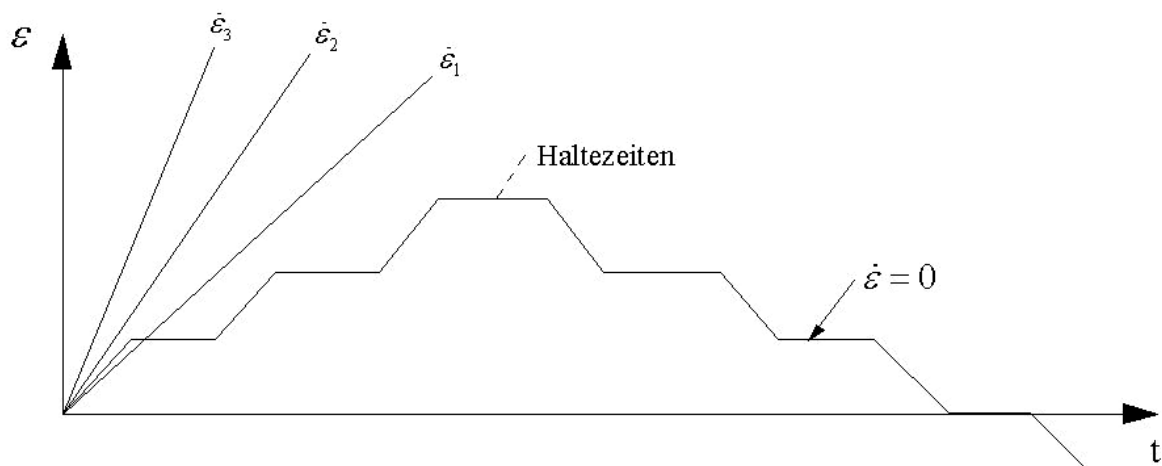


Abbildung 2-4 Spannungskontrollierter Prozess und Dehnungsantwort

Einteilung des beobachtbaren Materialverhaltens

In der phänomenologischen Materialtheorie ist es sinnvoll, das experimentell beobachtbare Materialverhalten in bestimmte Klassen einzuteilen. Diese Methodik basiert darauf, dass die Materialmodelle für jede dieser Klassen bestimmte mathematische Darstellungsformen besitzen, z.B. Funktionen, geschwindigkeitsunabhängige und geschwindigkeitsabhängige Funktionale.



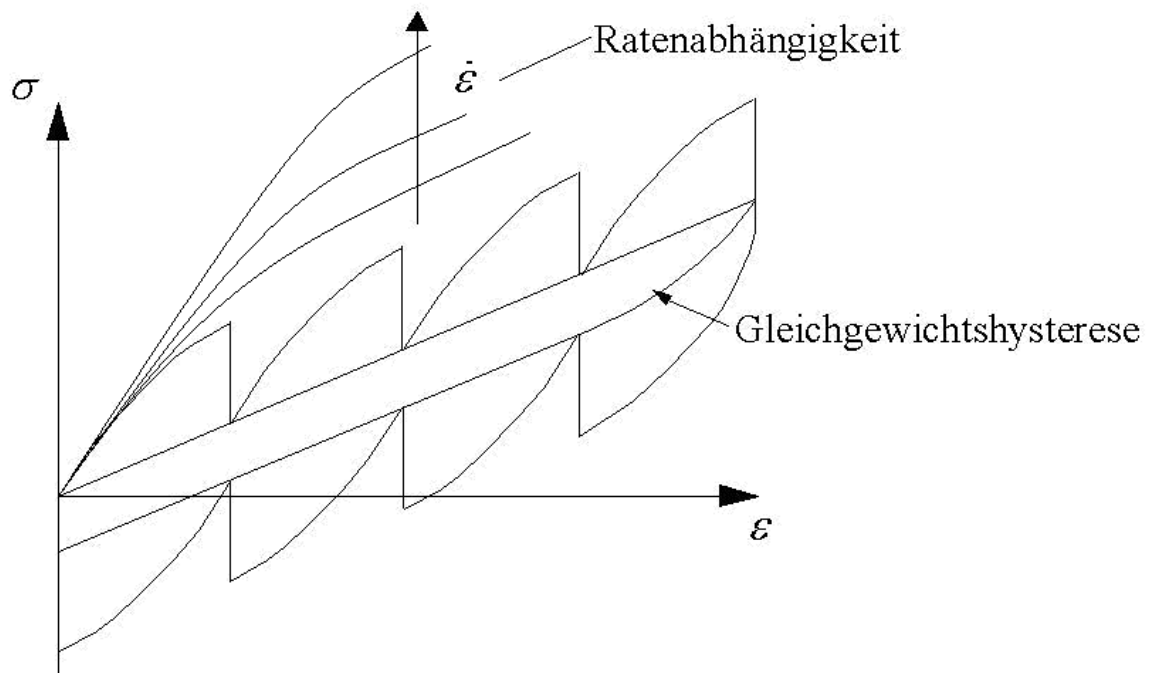


Abbildung 2-5 Beobachtbares Materialverhalten

In Abhängigkeit des Auftretens von Ratenabhängigkeit und Gleichgewichtshysterese kann das beobachtbare mechanische Materialverhalten in vier Klassen eingeteilt werden:

Beobachtung im Versuch	Materialklasse
Keine Ratenabhängigkeit Keine Gleichgewichtshysterese	Elastizität
Keine Ratenabhängigkeit Gleichgewichtshysterese	Plastizität
Ratenabhängigkeit Keine Gleichgewichtshysterese	Viskoelastizität
Ratenabhängigkeit Gleichgewichtshysterese	Viskoplastizität

Symbolische Darstellung der vier Materialklassen

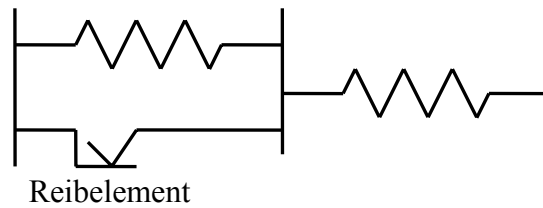
Die in der folgenden Tabelle verwendeten rheologischen Symbole Feder, Dämpfer und Reibelement dienen nur zur Veranschaulichung. Sie können aber auch als anschauliche Hilfsmittel zur Formulierung von Materialgleichungen verwendet werden.

Elastizität

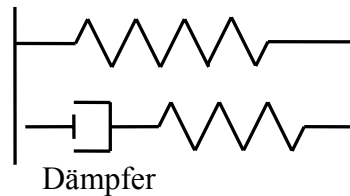


Feder

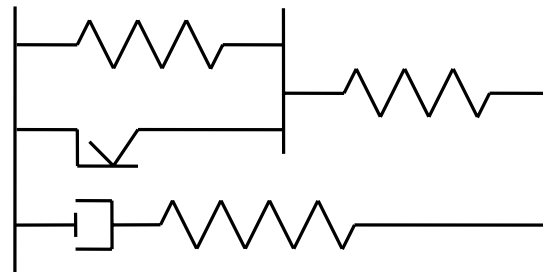
Plastizität



Viskoelastizität:



Viskoplastizität:



Für jede dieser vier Materialklassen haben die Materialgleichungen spezielle mathematische Eigenschaften.

In der Elastizität werden die Materialeigenschaften durch lineare oder nichtlineare algebraische Gleichungen zwischen dem Spannungs- und Deformationstensor beschrieben. In den anderen drei Materialklassen werden die Stoffeigenschaften durch Integral- oder Differentialgleichungen modelliert. In der Plastizität hängen die Lösungen der Differentialgleichungen geschwindigkeitsunabhängig vom Deformationsprozess ab, wogegen sie in der Viskoelastizität und der Viskoplastizität von der Geschwindigkeit der Verzerrungsprozesses abhängen. Bei unendlicher Verlangsamung des Verzerrungsprozesses gehen die Materialgleichungen der Viskoelastizität in Materialgleichungen der Elastizität über und die Materialgleichungen der Viskoplastizität gehen in Materialgleichungen der Plastizität über.

3 Allgemeine Materialgleichungen der linearen Viskoelastizität

Die lineare Viskoelastizität ist dadurch ausgezeichnet, dass der aktuelle Spannungszustand $\mathbf{T}(t)$ ein lineares Funktional der Verzerrungsgeschichte $\mathbf{E}(s)$ mit $-\infty < s \leq t$ ist:

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{L}_{s \leq t} [\mathbf{E}(s)]$$

Dabei hat das lineare Funktional $\mathbf{L}$ folgende Eigenschaft:

$$\mathbf{L}_{s \leq t} [\alpha_1 \mathbf{E}_1(s) + \alpha_2 \mathbf{E}_2(s)] = \alpha_1 \mathbf{L}_{s \leq t} [\mathbf{E}_1(s)] + \alpha_2 \mathbf{L}_{s \leq t} [\mathbf{E}_2(s)]$$

Eine äquivalente Darstellung der linearen Viskoelastizität ist durch das lineare Funktional $\hat{\mathbf{L}}$ mit

$$\mathbf{E}(t) = \hat{\mathbf{L}}_{s \leq t} [\mathbf{T}(s)] \quad \text{mit}$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{s \leq t} [\alpha_1 \mathbf{T}_1(s) + \alpha_2 \mathbf{T}_2(s)] = \alpha_1 \hat{\mathbf{L}}_{s \leq t} [\mathbf{T}_1(s)] + \alpha_2 \hat{\mathbf{L}}_{s \leq t} [\mathbf{T}_2(s)]$$

gegeben. Dieses ist das zu $\mathbf{L}$ inverse Funktional. Lineare Funktionale lassen sich allgemein durch Integrale vom Faltungstyp darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t-s) \dot{\mathbf{E}}(s) ds \\ &\Leftrightarrow \\ \mathbf{E}(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t-s) \dot{\mathbf{T}}(s) ds \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{G}(t)$ ein zeitabhängiger Tensor 4. Stufe mit den Matrixelementen $G_{ijkl}(t)$. Aufgrund der Symmetrie von $\mathbf{T}$ und $\mathbf{E}$ gilt $G_{ijkl} = G_{jikl}$ und $G_{ijkl} = G_{ijlk}$. Er beinhaltet damit 36 Relaxationsfunktionen. Entsprechende Symmetrieeigenschaften gelten für den Tensor 4. Stufe $\mathbf{J}(t)$, der 36 Kriech- bzw. Retardationsfunktionen enthält.

In Komponentenschreibweise lauten die beiden Materialgleichungen wie folgt:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-s) \dot{\epsilon}_{kl}(s) ds$$

bzw.

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(t-s) \dot{\sigma}_{kl}(s) ds$$

Der Tensor $\mathbf{G}(t)$ bzw. $\mathbf{J}(t)$ muss dabei den materiellen Symmetrieeigenschaften genügen.

Bei materieller Isotropie ist es üblich den Spannungs- und Verzerrungstensor in einen Kugel- und einen Deviatoranteil zu zerlegen und entsprechende Materialgleichungen zu formulieren:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^D + \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{T}) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^D + \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{E}) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{T}^D(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\mathbf{E}}^D(s) ds$$

$$\text{Sp}(\mathbf{T}(t)) = \int_{-\infty}^t k(t-s) \text{Sp}(\dot{\mathbf{E}}(s)) ds$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{E}^D(t) = \int_{-\infty}^t J(t-s) \dot{\mathbf{T}}^D(s) ds$$

$$\text{Sp}(\mathbf{E}(t)) = \int_{-\infty}^t h(t-s) \text{Sp}(\dot{\mathbf{T}}(s)) ds$$

Dabei bezeichnet $G(t-s)$ die Scherrelaxationsfunktion und $k(t-s)$ die Volumenrelaxationsfunktion. $J(t-s)$ und $h(t-s)$ sind entsprechend die Scher- und Volumenretardationsfunktionen.

Beispiel: dehnungsgesteuerter Zugversuch, die Funktion $\varepsilon(t)$ ist beliebig gegeben:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Sp}(\mathbf{T}) = \sigma, \quad \mathbf{T}^D = \sigma \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon_Q & \\ & & \varepsilon_Q \end{bmatrix}, \quad \text{Sp}(\mathbf{E}) = \varepsilon + 2\varepsilon_Q, \quad \mathbf{E}^D = (\varepsilon - \varepsilon_Q) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Einsetzen in das Materialmodell liefert:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t G(t-s) [\dot{\varepsilon}(s) - \dot{\varepsilon}_Q(s)] ds \\ \text{und} \\ \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t k(t-s) [\dot{\varepsilon}(s) + 2\dot{\varepsilon}_Q(s)] ds \end{aligned} \right\} *$$

Dies sind zwei gekoppelte Integralgleichungen zur Bestimmung der Spannung $\sigma(t)$ und der Querdehnung $\varepsilon_Q(t)$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t G(t-s) [\dot{\varepsilon}(s) - \dot{\varepsilon}_Q(s)] ds = \int_{-\infty}^t k(t-s) [\dot{\varepsilon}(s) + 2\dot{\varepsilon}_Q(s)] ds$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^t (G(t-s) - k(t-s)) \dot{\varepsilon}(s) ds = \int_{-\infty}^t (G(t-s) + 2k(t-s)) \dot{\varepsilon}_Q(s) ds$$

Mit Hilfe dieser Integralgleichung lässt sich prinzipiell die Querdehnung $\varepsilon_Q(t)$ als Funktional der Dehnungsgeschichte $\varepsilon(s), -\infty < s \leq t$, ermitteln. Setzt man dies in eine der beiden Gleichungen, die mit * gekennzeichnet sind ein, so ergibt sich die Spannung $\sigma(t)$. Die experimentelle Ermittlung der Relaxationsfunktionen $G(t)$ und $k(t)$ aus Zugversuchen gestaltet sich also ziemlich schwierig. Der Zugversuch ist kein rein dehnungskontrollierter Versuch. Besser geeignet sind entsprechende Versuche, bei denen der Verzerrungstensor komplett bzw. vollständig von außen vorgegeben werden. Dies trifft beispielsweise für den Scherversuch und die reine uniaxiale Dehnung (ohne Querdehnungen) zu.

Beispiel: dehnungsgesteuerter Scherversuch, $\gamma(t)$ gegeben:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \\ \tau & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Sp}(\mathbf{T}) = 0, \quad \mathbf{T}^D = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \\ \tau & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Sp}(\mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{E}^D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

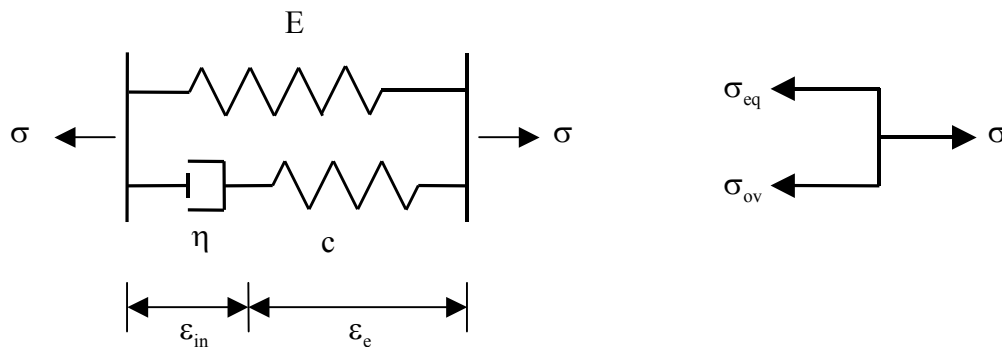
Einsetzen in das Materialmodell liefert das Funktional

$$\tau(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\gamma}(s) ds$$

für die Schubspannung.

4 Das Dreiparameter-Modell der linearen Viskoelastizität

Das mechanische Verhalten des aus zwei Federn und einem Dämpfer bestehenden Dreiparameter-Modells wird durch eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Diese Differentialgleichung weist eine Symmetrie in den Spannungen und Dehnungen auf und kann sowohl für Dehnungssteuerung als auch für Spannungssteuerung gelöst werden. Dieses Modell stellt das einfachste Materialmodell für inelastisches Werkstoffverhalten dar und beinhaltet praktisch alle experimentell beobachteten geschwindigkeitsabhängigen Phänomene. Zur quantitativen Beschreibung von realen Materialeigenschaften ist es allerdings zu einfach.



4.1 Mathematisches Modell

Die entsprechenden Modellgleichungen des Dreiparameter-Modells erhält man durch die Anwendung des Schnittprinzips auf die obige Abbildung. Die rheologischen Grundelemente Feder und Dämpfer werden als linear angenommen.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_{eq} + \sigma_{ov} \\ \varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_{in} \\ \sigma_{eq} &= E\varepsilon \\ \sigma_{ov} &= c\varepsilon_e \\ \dot{\varepsilon}_{in} &= \frac{1}{\eta} \sigma_{ov} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + c \left[\dot{\varepsilon} - \frac{1}{\eta} (\sigma - E\varepsilon) \right] \Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{\sigma} + \frac{c}{\eta} \sigma = (E + c) \dot{\varepsilon} + \frac{Ec}{\eta} \varepsilon}}$$

Verhalten bei sehr langsamen Prozessen

$$\dot{\sigma} \ll \frac{c}{\eta} \sigma, \quad (E + c) \dot{\varepsilon} \ll \frac{Ec}{\eta} \varepsilon \Rightarrow \underline{\underline{\sigma = E\varepsilon}}$$

Diese Beziehung wird als Statische Kennlinie oder Gleichgewichtskennlinie bezeichnet. Das Materialverhalten wird bei sehr langsamen Prozessen durch diese Kennlinie beschrieben.

Verhalten bei sehr schnellen Prozessen

$$\dot{\sigma} \gg (c/\eta)\sigma, \quad (E+c)\dot{\varepsilon} \gg (Ec/\eta)\varepsilon$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma = (E+c)\varepsilon}}$$

Diese Beziehung wird als Spontane Kennlinie bezeichnet.

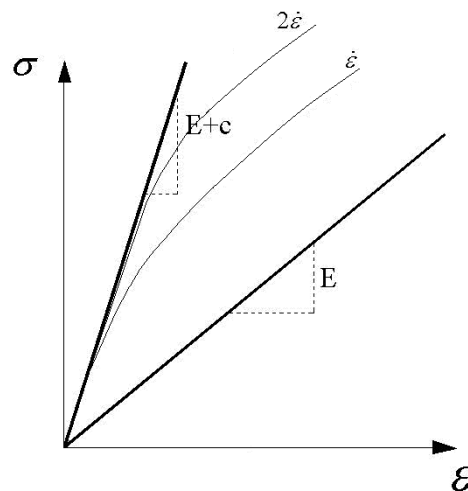


Abbildung 4-1 Verschiedene Kennlinien

Verhalten bei beliebigen dehnungsgesteuerten Prozessen: Vorgabe von $\varepsilon(t)$

$$\left(\sigma e^{\frac{c}{\eta}t} \right)' = \left((E+c)\dot{\varepsilon} + \frac{Ec}{\eta}\varepsilon \right) e^{\frac{c}{\eta}t}$$

$$\text{mit: } \left(\varepsilon e^{\frac{c}{\eta}t} \right)' = \dot{\varepsilon} e^{\frac{c}{\eta}t} + \varepsilon \frac{c}{\eta} e^{\frac{c}{\eta}t} \Rightarrow \frac{c}{\eta} \varepsilon e^{\frac{c}{\eta}t} = \left(\varepsilon e^{\frac{c}{\eta}t} \right)' - \dot{\varepsilon} e^{\frac{c}{\eta}t}$$

$$\Rightarrow \left(\sigma(t) e^{\frac{c}{\eta}t} \right)' = (E+c)\dot{\varepsilon} e^{\frac{c}{\eta}t} + E \left(\varepsilon e^{\frac{c}{\eta}t} \right)' - E\dot{\varepsilon} e^{\frac{c}{\eta}t}$$

$$\Rightarrow \left(\sigma(t) e^{\frac{c}{\eta}t} \right)' = E \left(\varepsilon e^{\frac{c}{\eta}t} \right)' + c\dot{\varepsilon} e^{\frac{c}{\eta}t}$$

$$\Rightarrow \sigma(t) e^{\frac{c}{\eta}t} - \sigma(0) = E\varepsilon(t) e^{\frac{c}{\eta}t} - E\varepsilon(0) + \int_0^t c e^{\frac{c}{\eta}s} \dot{\varepsilon}(s) ds$$

$$\text{mit } \sigma(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon(0) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_0^t c e^{-\frac{c}{\eta}(t-s)} \dot{\varepsilon}(s) ds$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma(t) = \int_0^t \left\{ E + c e^{-\frac{c}{\eta}(t-s)} \right\} \dot{\varepsilon}(s) ds}}$$

Verhalten bei beliebigen spannungsgesteuerten Prozessen: Vorgabe von $\sigma(t)$

$$\dot{\varepsilon} + \left(\frac{E}{E+c} \frac{c}{\eta} \right) \varepsilon = \frac{1}{E+c} \dot{\sigma} + \left(\frac{E}{E+c} \frac{c}{\eta} \right) \frac{1}{E} \sigma$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man die Lösung am schnellsten:

$$\underline{\underline{\varepsilon(t) = \int_0^t \left\{ \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right) e^{-\frac{E}{E+c} \frac{c}{\eta} (t-s)} \right\} \dot{\sigma}(s) ds}}$$

Allgemeine Form

Hiermit wurden zwei äquivalente Darstellungsformeln des Antwortverhaltens des Dreiparameter-Modells hergeleitet, welche die allgemeine Form

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (\text{Dehnungssteuerung})$$

und

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-s) \dot{\sigma}(s) ds \quad (\text{Spannungssteuerung})$$

besitzen. Um die Materialfunktionen $G(t-s)$ bzw. $G(t)$ und $J(t-s)$ bzw. $J(t)$ zu interpretieren, werden als Anregung Rampenfunktionen zugrunde gelegt und das Antwortverhalten jeweils für $t > T$ untersucht.

Dehnungssteuerung

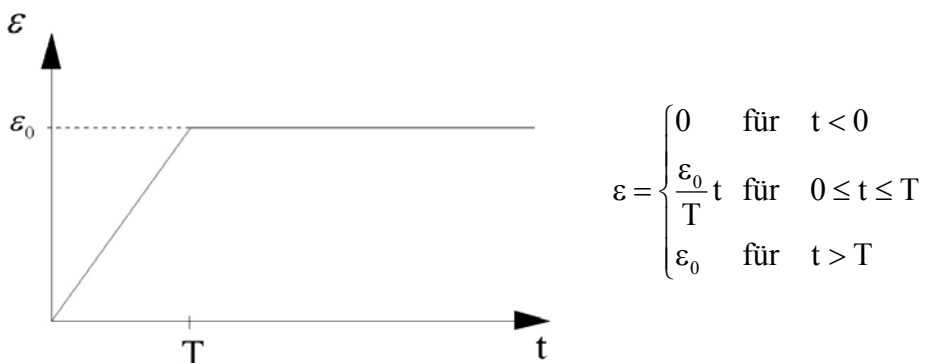


Abbildung 4-2 Rampenfunktion (Dehnung)

Um einen Dehnungssprung zu modellieren, wird nach den entsprechenden Umformungen der Grenzübergang $T \rightarrow 0$ gebildet:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds = \int_0^T G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds + \underbrace{\int_T^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds}_{=0} = \\ &= \int_0^T G(t-s) \frac{\varepsilon_0}{T} ds \end{aligned}$$

Substitution : $S = Tx \Rightarrow ds = Tdx$

$$\Rightarrow \sigma(t) = \varepsilon_0 \int_0^1 G(t-Tx) dx$$

Grenzübergang $T \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \sigma(t) = \varepsilon_0 \int_0^1 G(t) dx$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t)}}$$

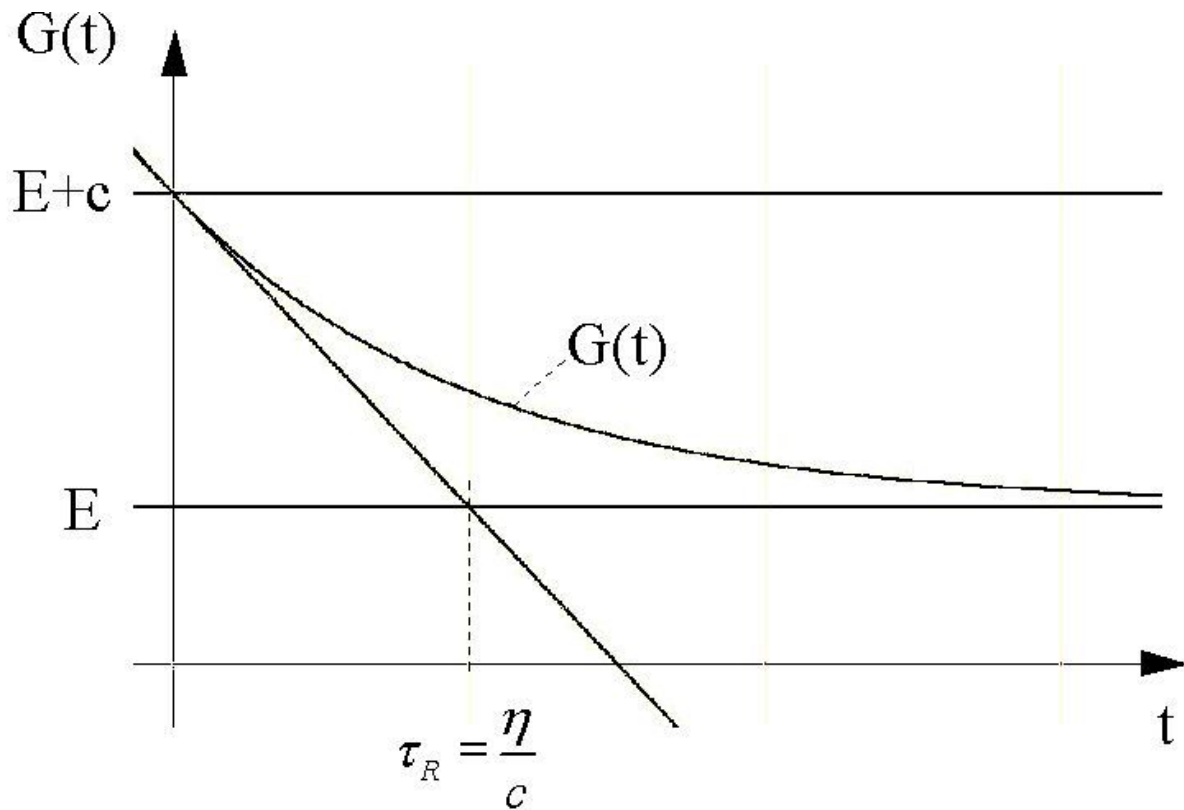
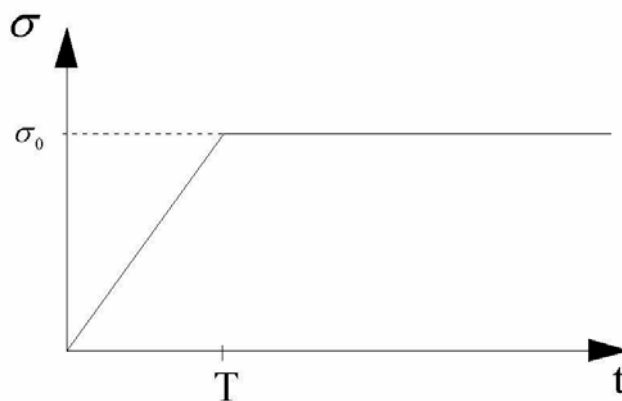


Abbildung 4-3 Relaxationsfunktion $G(t)$ der Dreiparameter-Modells

Spannungssteuerung

Für den unten dargestellten Sprungprozess in der Spannung ergibt sich mit den unten aufgeführten Begriffen die entsprechende Dehnungsantwort.



$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{\sigma_0}{T} t & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ \sigma_0 & \text{für } t > T \end{cases}$$

die folgende Beziehung:

$$\underline{\underline{\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)}}$$

Abbildung 4-4 Rampenfunktion (Spannung)

Sie hängt linear von der Spannungsamplitude ab.

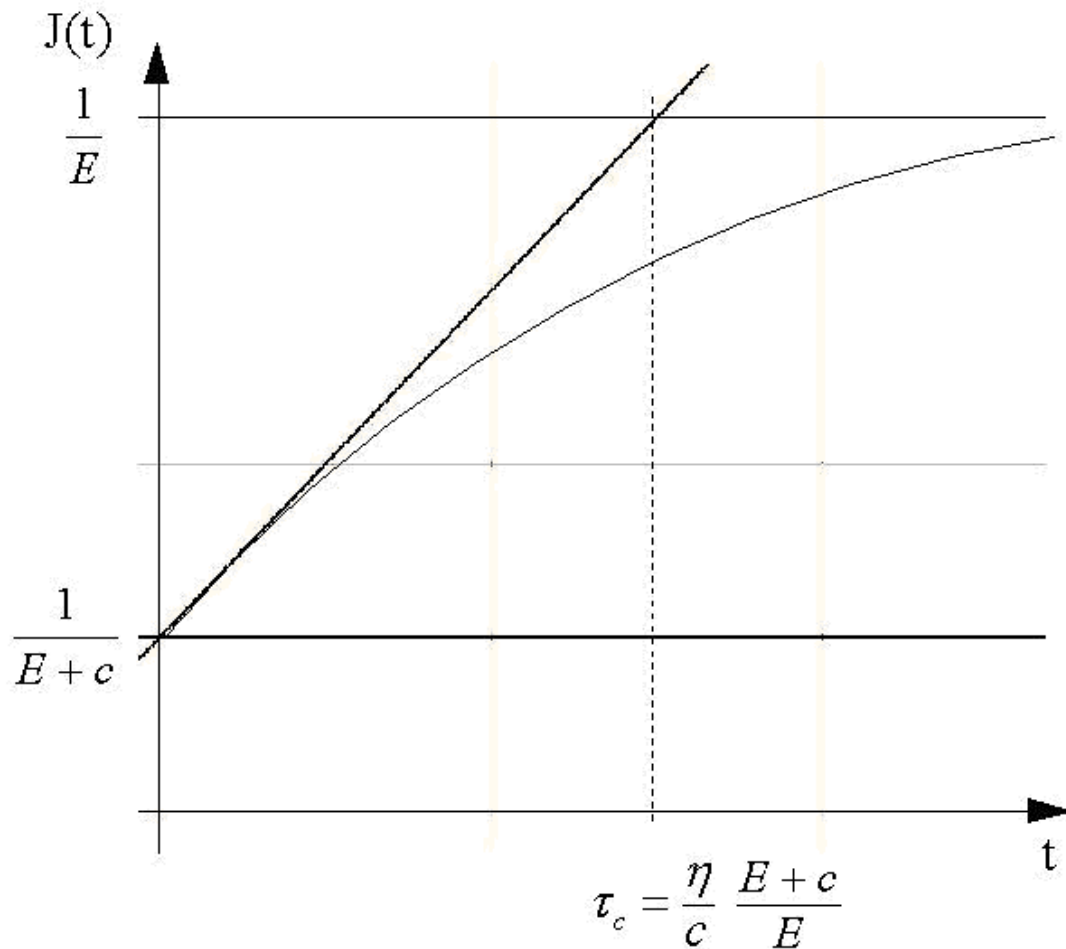


Abbildung 4-5 Kriechfunktion $J(t)$ des Dreiparameter-Modells

Die Funktion $G(t)$ beschreibt das zeitliche Abklingverhalten der Spannung bei Deformationssprüngen und heißt Relaxationsfunktion. Entsprechend beschreibt die Funktion $J(t)$ das Anwachsen der Dehnung bei Spannungssprüngen. Sie heißt Kriech- oder Retardationsfunktion. Beide Funktionen wurden aus demselben Materialmodell hergeleitet und hängen daher auch von denselben Materialparametern ab. Sie sind also nicht unabhängig voneinander. Später werden mathematische Relationen zwischen diesen beiden Funktionen im Zeit- und im Frequenzbereich hergeleitet.

Die Zeitkonstante $\tau_r = \eta/c$ ist beim Dreiparameter-Modell ein Maß für die Dauer des Relaxationsvorgangs und die Konstante $\tau_c = \tau_r (E + c)/E$ ein Maß für die Dauer des Kriechvorgangs. Offenbar gilt hier die Ungleichung $\tau_c > \tau_r$. Das heißt Kriechvorgänge dauern in der Regel deutlich länger als Relaxationsvorgänge. Falls die Gleichgewichtsspannung Null ist, d.h. $E = 0$, dauern die Kriechvorgänge sogar unendlich lange.

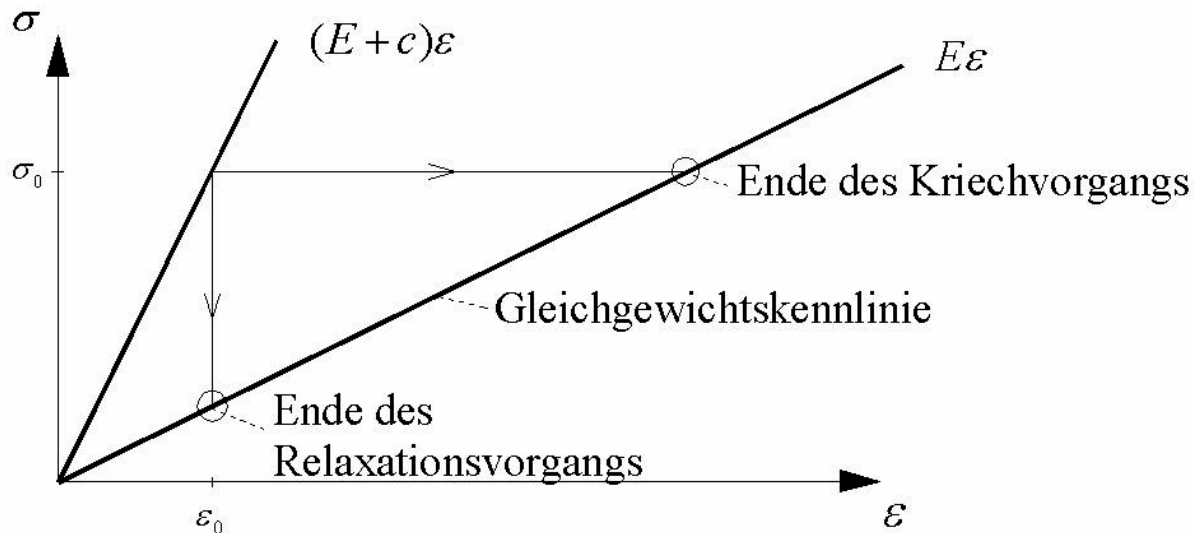


Abbildung 4-6 Relaxations/Retardationszeit

Bei linear viskoelastischen Stoffen lässt sich die Gleichgewichtskennlinie, $\sigma_{eq} = E\varepsilon$, sowohl durch Relaxationsversuche als auch durch Kriechversuche ermitteln. Aufgrund dessen, dass die Relaxation nach kürzerer Zeit zum Stillstand kommt als das Kriechen, ist es vorteilhafter, Relaxationsexperimente durchzuführen.

4.2 Verhalten bei sinusförmiger dehnungsgesteuerten Beanspruchungen

In der Prüfung von viskoelastischen Stoffen ist es üblich, die Werkstoffe mit sinusförmigen Dehnungen oder Spannungen unter Zug-/Druck- oder Scherbelastungen zu beanspruchen und die Antwortgrößen zu messen.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \sin \omega t$$

ε_0 : konstante Vordeformation

$\Delta\varepsilon$: Dehnungsamplitude

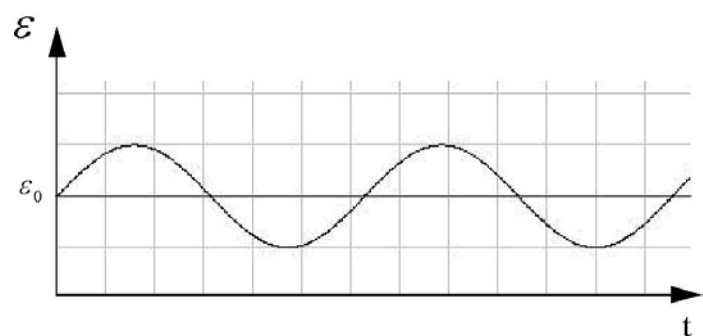


Abbildung 4-7 Sinusförmige Dehnung

Bei Dehnungssteuerung normiert man die gemessene Spannungsamplitude auf die vorgegebene Dehnungsamplitude und im umgekehrten Fall die beobachtete Dehnungsamplitude auf die Spannungsamplitude. Bei diesen Experimenten werden häufig die Frequenz, der Mittelwert und die Amplitude der Anregung variiert.

Spannungsfunktional bei Dehnungssteuerung

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_0^t c e^{-\frac{c}{\eta}(t-s)} \dot{\varepsilon}(s) ds$$

$$\sigma(t) - E\varepsilon_0 = E\Delta\varepsilon \sin \omega t + \omega \Delta\varepsilon c \int_0^t e^{-\frac{c}{\eta}(t-s)} \cos \omega s ds$$

$$\frac{\sigma(t) - E\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon} = E \sin \omega t + \omega c e^{-\frac{c}{\eta}t} \int_0^t e^{\frac{c}{\eta}s} \cos \omega s ds$$

$$\frac{\sigma(t) - E\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon} = E \sin \omega t + \omega c e^{-\frac{c}{\eta}t} \left[\frac{e^{\frac{c}{\eta}s}}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \left\{ \frac{c}{\eta} \cos \omega s + \omega \sin \omega s \right\} \right]_0^t$$

$$\frac{\sigma(t) - E\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon} = E \sin \omega t + \omega c e^{-\frac{c}{\eta}t} \frac{1}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \left\{ e^{\frac{c}{\eta}t} \left(\frac{c}{\eta} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right) - \left(\frac{c}{\eta} + 0 \right) \right\}$$

$$\frac{\sigma(t) - E\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon} = E \sin \omega t + \frac{\omega c}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \left\{ \frac{c}{\eta} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right\} - \underbrace{\frac{\omega c e^{-\frac{c}{\eta}t}}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \frac{c}{\eta}}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}$$

$$\frac{\sigma(t) - E\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon} = \left(E + \frac{\omega^2 c}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \right) \sin \omega t + \frac{\omega c^2/\eta}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \cos \omega t$$

$$\boxed{\sigma(t) = E\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \left\{ \left(E + \frac{\omega^2 c}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \right) \sin \omega t + \frac{\omega c^2/\eta}{\omega^2 + (c/\eta)^2} \cos \omega t \right\}}$$

In vielen Publikationen wird der aus der konstanten Vordeformation ε_0 resultierende Spannungsanteil als statische Spannung $\sigma_{\text{stat}} = E\varepsilon_0$ bezeichnet. Der mit der harmonischen Dehnung $\varepsilon(t)$ in Phase laufende Anteil der Spannung bzw. dessen Vorfaktor wird als Speichermodul bezeichnet:

$$G'(\omega) = E + \frac{c(\omega\eta/c)^2}{(\omega\eta/c)^2 + 1}$$

Der mit der Dehnrate $\dot{\varepsilon}(t)$ in Phase laufende Anteil der Spannung bzw. dessen frequenzabhängiger Vorfaktor ist der Verlustmodul:

$$G''(\omega) = \frac{c(\omega\eta/c)}{(\omega\eta/c)^2 + 1}$$

Der Speichermodul ist ein Maß für die frequenzabhängigen elastischen Materialeigenschaften des betreffenden Werkstoffes und der Verlustmodul ein Maß für seine frequenzabhängigen

Dämpfungseigenschaften. In der linearen Viskoelastizität sind beide Moduli von der Dehnungsamplitude unabhängig. Mit diesen Vereinbarungen gilt:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma_{\text{stat}}(\varepsilon_0) + \Delta\varepsilon \{G'(\omega)\sin\omega t + G''(\omega)\cos\omega t\} \\ \sigma(t) &= \sigma_{\text{stat}}(\varepsilon_0) + \Delta\varepsilon G_{\text{dyn}} \sin(\omega t + \delta) \\ \text{mit } G_{\text{dyn}} &= \sqrt{G'^2 + G''^2} \text{ und } \tan\delta = \frac{G''}{G'}\end{aligned}$$

Die Größe G_{dyn} ist der geometrische Mittelwert aus Speicher- und Verlustmodul und der Winkel $\delta = \arctan(G''/G')$ beschreibt die Phasendifferenz zwischen Spannung und Dehnung. Die beiden oben aufgeführten Darstellungen der Spannungsantwort sind äquivalent. Mit der Abkürzung $\tau_R = \eta/c$ für die Relaxationszeit gilt:

$$\begin{aligned}G'(\omega) &= E + \frac{(\omega\tau_R)^2 c}{1 + (\omega\tau_R)^2} \\ G''(\omega) &= \frac{(\omega\tau_R) c}{1 + (\omega\tau_R)^2}\end{aligned}$$

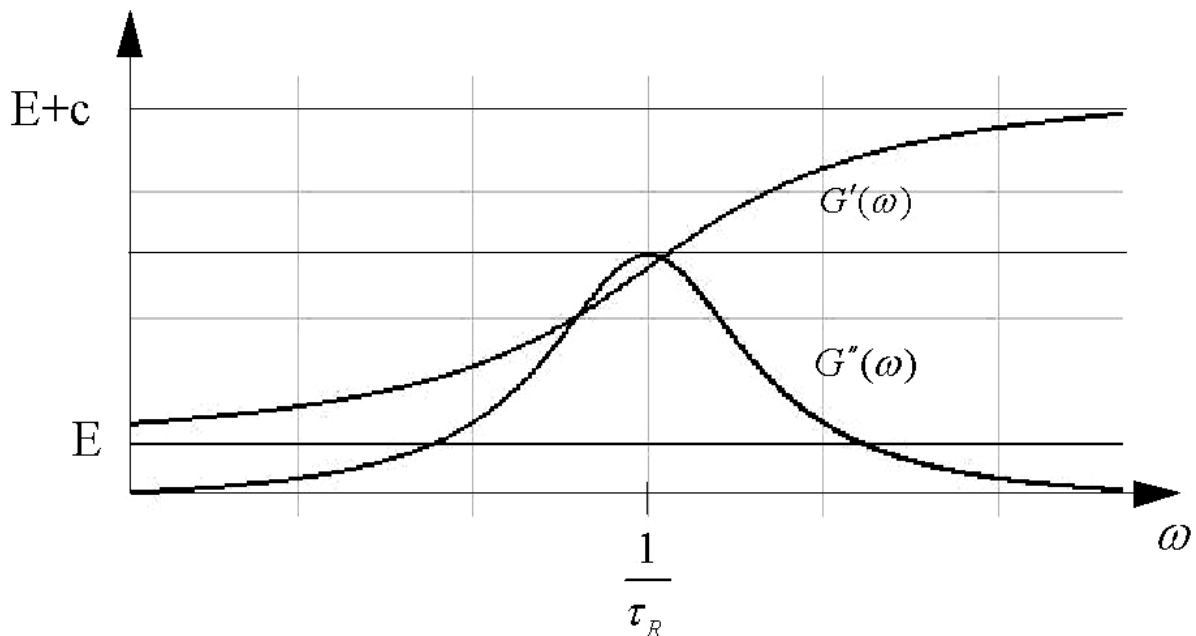


Abbildung 4-8 G' und G'' des Dreiparameter-Modells

Der frequenzabhängige Speichermodul hat bei hinreichend kleinen Frequenzen $\omega \ll 1/\tau_R$ den Wert E des Gleichgewichtselastizitätsmoduls und bei $\omega \gg 1/\tau_R$ den Wert $E+c$ des sponta-

nen Moduls. Dazwischen steigt er monoton an. Der Verlustmodul weist bei der Frequenz $\omega = 1/\tau_R$ ein ausgeprägtes Maximum auf und für $\omega \ll 1/\tau_R$ und $\omega \gg 1/\tau_R$ geht er gegen Null.

4.3 Verhalten bei sinusförmiger spannungsgesteuerter Beanspruchung

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\sigma \sin \omega t$$

σ_0 : konstante Vorlast

$\Delta\sigma$: Spannungsamplitude

Dehnungsfunktional bei Spannungssteuerung

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} e^{-\frac{E}{E+c}\eta(t-s)} \dot{\sigma}(s) ds$$

$$\frac{\varepsilon(t) - \sigma_0/E}{\Delta\sigma} = \frac{1}{E} \sin \omega t + \omega \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} e^{-\frac{E}{E+c}\eta t} \int_0^t e^{\frac{E}{E+c}\eta s} \cos \omega s ds$$

mit der Retardationszeit $\tau_c = \frac{E}{E+c} \frac{c}{\eta}$ ergibt sich :

$$\frac{\varepsilon(t) - \sigma_0/E}{\Delta\sigma} = \frac{\sin \omega t}{E} + \omega \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \int_0^t e^{\frac{s}{\tau_c}} \cos \omega s ds$$

$$\frac{\varepsilon(t) - \sigma_0/E}{\Delta\sigma} = \frac{\sin \omega t}{E} + \omega \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \left[\frac{e^{\frac{s}{\tau_c}}}{\omega^2 + (1/\tau_c)^2} \left\{ \frac{1}{\tau_c} \cos \omega s + \omega \sin \omega s \right\} \right]_0^t$$

$$\frac{\varepsilon(t) - \sigma_0/E}{\Delta\sigma} = \frac{\sin \omega t}{E} + \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} \frac{\omega \tau_c^2}{(\omega \tau_c)^2 + 1} \left\{ \frac{1}{\tau_c} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right\} - \underbrace{\left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_c}} \omega \tau_c^2}{(\omega \tau_c)^2 + 1} \left\{ \frac{1}{\tau_c} - 0 \right\} \right\}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty}$$

$$\frac{\varepsilon(t) - \sigma_0/E}{\Delta\sigma} = \left\{ \frac{1}{E} + \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} \right\} \frac{(\omega \tau_c)^2}{(\omega \tau_c)^2 + 1} \sin \omega t + \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} \frac{\omega \tau_c}{(\omega \tau_c)^2 + 1} \cos \omega t$$

Definitionen:

$$\varepsilon_{\text{stat}} = \sigma_0/E$$

Statische Dehnung

$$J' = \left\{ \frac{1}{E} + \left[\frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right] \right\} \frac{(\omega \tau_c)^2}{(\omega \tau_c)^2 + 1}$$

Speichernachgiebigkeit

$$J'' = - \left\{ \frac{1}{E+c} - \frac{1}{E} \right\} \frac{\omega \tau_c}{(\omega \tau_c)^2 + 1}$$

Verlustnachgiebigkeit

Damit gilt:

$$\underline{\underline{\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{stat}}(\sigma_0) + \Delta\sigma [J'(\omega) \sin \omega t - J''(\omega) \cos \omega t]}}$$

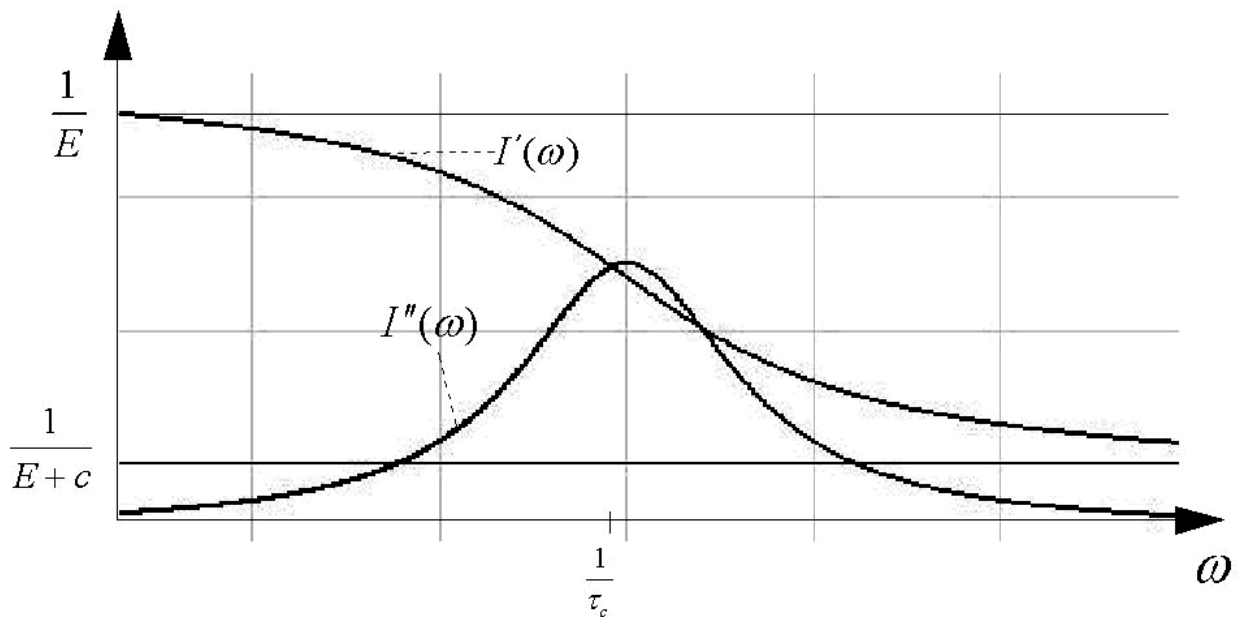


Abbildung 4-9 J' und J'' des Dreiparameter-Modells

Die frequenzabhängige Speichernachgiebigkeit hat für hinreichend kleine Anregungsfrequenzen $\omega \gg 1/\tau_c$ den Wert $1/E$ und geht für $\omega \gg 1/\tau_c$ gegen den Wert $1/(E+c)$. Die Verlustnachgiebigkeit weist bei der Anregungsfrequenz $\omega = 1/\tau_c$ ein Maximum auf und geht für sehr große und sehr kleine Frequenzen asymptotisch gegen null. Diese Eigenschaften liegen daran, dass sich das hier untersuchte Materialmodell der linearen Viskoelastizität für sehr große und kleine Frequenzen linear elastisch verhält.

Die bisherigen Betrachtungen zum Speicher- und Verlustmodul bzw. zu den entsprechenden Nachgiebigkeitsgrößen haben gezeigt, dass sowohl die Speichergrößen als auch die Verlustgrößen bzw. die Moduli und die Nachgiebigkeiten von denselben Materialparametern abhängen. Auch diese Materialfunktionen sind daher nicht unabhängig voneinander. Im Prinzip ist es möglich aus jeder der bisher eingeführten viskoelastischen Materialfunktionen alle anderen auszurechnen. Beim Dreiparameter-Modell ist diese Berechnung analytisch möglich, da sich alle Funktionen aus der ursprünglichen Differentialgleichung berechnen lassen. Bei komplexeren Modellen der linearen Viskoelastizität muss hierzu allerdings die Numerik herangezogen werden.

4.4 Herleitung der komplexen dynamischen Materialfunktionen

Im Folgenden wird eine alternative Methode erläutert, mit der sich die dynamischen Materialfunktionen berechnen lassen. Diese Methode basiert darauf, dass sich die harmonischen Anregungen und Materialantworten sowie die dynamischen Materialfunktionen mit Hilfe von komplexen Zahlen bzw. Exponentialfunktionen darstellen lassen.

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad \text{und} \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

Hiermit wird nun die lineare Differentialgleichung des Dreiparameter-Modells ausgewertet.

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_R} \sigma = (E + c) \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau_R} E \varepsilon \quad \text{mit} \quad \tau_R = \frac{\eta}{c}$$

Ansatz: $\sigma = \hat{\sigma}(\omega) e^{i\omega t}$, $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\omega) e^{i\omega t}$, $\hat{\sigma}$ und $\hat{\varepsilon}$ sind die jeweiligen Amplituden

$$\Rightarrow i\omega \hat{\sigma} + \frac{1}{\tau_R} \hat{\sigma} = i\omega(E + c) \hat{\varepsilon} + \frac{1}{\tau_R} E \hat{\varepsilon}$$

$$\hat{\sigma}(1 + i\omega\tau_R) = \hat{\varepsilon}(E + i\omega\tau_R(E + c))$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = \frac{(1 + i\omega\tau_R)E + i\omega\tau_R c}{1 + i\omega\tau_R} = E + \frac{i\omega\tau_R c}{1 + i\omega\tau_R}$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = E + \frac{(\omega\tau_R)^2 c}{1 + (\omega\tau_R)^2} + i \frac{\omega\tau_R c}{1 + (\omega\tau_R)^2}$$

$$\underline{\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = G'(\omega) + iG''(\omega)}$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} = \frac{1 + i\omega\tau_R}{E + i\omega\tau_R(E + c)} = \frac{E}{E + c} \frac{1}{E} \frac{(E + c)/E + i\omega\tau_R(E + c)/E}{1 + i\omega\tau_R(E + c)/E}$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{E + c} \frac{(E + c)/E + i\omega\tau_c}{1 + i\omega\tau_c} = \frac{1}{E} \frac{1}{1 + i\omega\tau_c} + \frac{1}{E + c} \frac{i\omega\tau_c}{1 + i\omega\tau_c}$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{E} \frac{1 - i\omega\tau_c}{1 + (\omega\tau_c)^2} + \frac{1}{E + c} \frac{(\omega\tau_c)^2 + i\omega\tau_c}{1 + (\omega\tau_c)^2}$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} = \left\{ \frac{1}{E + c} - \frac{1}{E} \right\} \frac{i\omega\tau_c}{1 + (\omega\tau_c)^2} + \left\{ \frac{1}{E} + \frac{(\omega\tau_c)^2}{E + c} \right\} \frac{1}{1 + (\omega\tau_c)^2}$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{E} + \left\{ \frac{1}{E + c} - \frac{1}{E} \right\} \frac{(\omega\tau_c)^2}{1 + (\omega\tau_c)^2} + i \left\{ \frac{1}{E + c} - \frac{1}{E} \right\} \frac{\omega\tau_c}{1 + (\omega\tau_c)^2}$$

$$\underline{\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} = J'(\omega) - iJ''(\omega)}$$

Insgesamt wurde gezeigt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} &= G'(\omega) + iG''(\omega) = G^*(\omega) \\ \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} &= J'(\omega) - iJ''(\omega) = J^*(\omega) \end{aligned} \right\}^*$$

Dabei wird die Funktion $G^*(\omega)$ als komplexer Modul und die Funktion $J^*(\omega)$ als komplexe Nachgiebigkeit bezeichnet. Die Materialgleichungen eines harmonisch beanspruchten linear viskoelastischen Werkstoffes im Frequenzbereich entsprechen also formal denen eines linear elastischen Materials im Zeitbereich. Aus den beiden Gleichungen * ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= G^*(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) \\ \hat{\varepsilon} &= J^*(\omega) \hat{\sigma}(\omega) \\ \Rightarrow \boxed{G^*(\omega) J^*(\omega) &= 1} \end{aligned}$$

Für das Dreiparameter-Modell wurden also insgesamt vier charakteristische Funktionen hergeleitet, die das Materialverhalten im Zeitbereich und im Frequenzbereich bei dehnungs- und spannungsgesteuerten Prozessen beschreiben. Dies gilt ganz allgemein bei linear viskoelastischen Materialien, wie später gezeigt wird. Ferner ist anzumerken, dass das Dreiparameter-Modell zwar sehr gut zur Einführung der benötigten Begriffe geeignet ist, zur Darstellung realer linear viskoelastischer Materialeigenschaften aber zu einfach ist.

4.5 Thermomechanische Konsistenz des Dreiparameter-Modells

Abschließend wird die thermomechanische Konsistenz des Dreiparameter-Modells nachgewiesen. Die im rheologischen System gespeicherte freie Energie entspricht der in den beiden Federn gespeicherten mechanischen Energie. Sie lautet:

$$\rho\psi = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 + \frac{1}{2} c(\varepsilon - \varepsilon_{in})^2$$

Die eindimensionale Clausius-Duhem-Ungleichung, welche $\sigma\dot{\varepsilon} - \rho\dot{\psi} \geq 0$ lautet, muss von allen Modellgleichungen für beliebige Beanspruchungsprozesse erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \rho\dot{\psi} &= E\varepsilon\dot{\varepsilon} + c(\varepsilon - \varepsilon_{in})\dot{\varepsilon} - c(\varepsilon - \varepsilon_{in})\dot{\varepsilon}_{in} \\ \sigma\dot{\varepsilon} - \rho\dot{\psi} &= \left(\sigma - \left[E\varepsilon + c(\varepsilon - \varepsilon_{in}) \right] \right) \dot{\varepsilon} + c[\varepsilon - \varepsilon_{in}]\dot{\varepsilon}_{in} \geq 0 \end{aligned}$$

Damit diese Ungleichung für beliebige Dehnraten $\dot{\varepsilon}$ erfüllt wird, muss für die Spannung die Beziehung $\sigma = E\varepsilon + c(\varepsilon - \varepsilon_{in})$ gelten. Um die verbleibende Restungleichung $c(\varepsilon - \varepsilon_{in})\dot{\varepsilon}_{in} \geq 0$

zu erfüllen, wird für die inelastische Dehnrates $\dot{\varepsilon}_{\text{in}} = c/\eta(\varepsilon - \varepsilon_{\text{in}})$ mit der positiven Viskosität $\eta > 0$ gesetzt. Diese Relation stimmt mit der eingangs eingeführten Beziehung überein. Wegen $\sigma\dot{\varepsilon} - \rho\dot{\psi} = (1/\eta)(c(\varepsilon - \varepsilon_{\text{in}}))^2$ ist das Dreiparameter-Modell der linearen Viskoelastizität für beliebige Beanspruchungsgeschichten thermomechanisch konsistent.

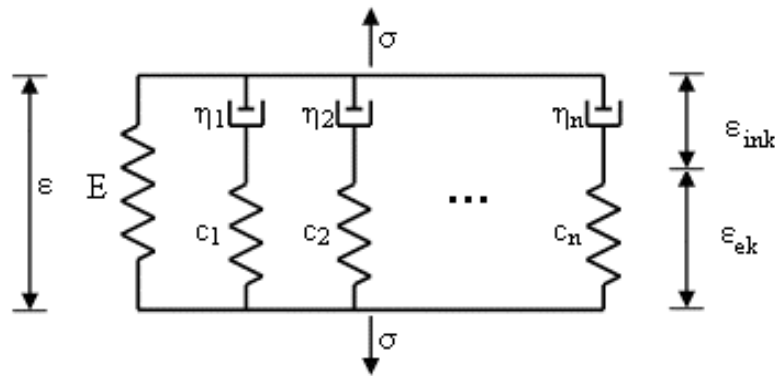
Mit Hilfe dieser Technik lässt sich prinzipiell für jedes aus beliebig vielen linearen oder nicht-linearen Federn und Dämpfern aufgebaute rheologische Modell die thermomechanische Konsistenz nachweisen. Man kann damit sogar die Behauptung aufstellen, dass jedes durch rheologische Elemente darstellbare Materialgesetz auch thermomechanisch konsistent ist.

5 Allgemeine Konzepte der linearen Viskoelastizität

Da das Dreiparameter-Modell der linearen Viskoelastizität nicht bzw. kaum dazu geeignet ist, reale viskoelastische Werkstoffeigenschaften quantitativ abzubilden, werden nun allgemeinere Ansätze und Modellierungstechniken formuliert.

5.1 Diskretes Relaxationsspektrum

Die Idee eines erweiterten bzw. besseren Materialmodells besteht darin, n Maxwell-Elemente mit einer Feder zur Darstellung der Gleichgewichtsspannung parallel zu schalten.



Materialgleichungen:

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov}$$

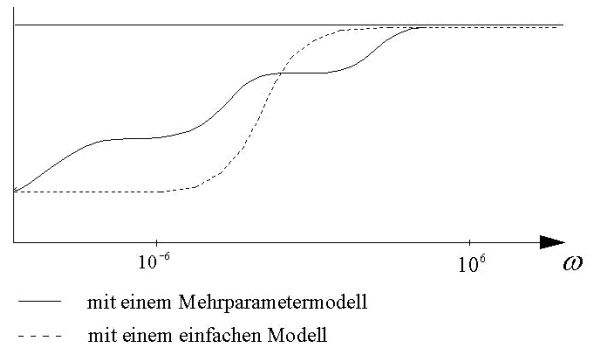
$$\varepsilon = \varepsilon_{ek} + \varepsilon_{ink} \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

$$\sigma_{eq} = E\varepsilon$$

$$\sigma_{ov} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ovk}$$

$$\sigma_{ovk} = c_k \varepsilon_{ek}$$

$$\sigma_{ovk} = \eta_k \dot{\varepsilon}_{ink} \Leftrightarrow \dot{\varepsilon}_{ink} = \frac{1}{\eta_k} \sigma_{ovk}$$



Eliminiert man die inelastischen Dehnungen der viskosen Dämpfungselemente, so folgt zunächst:

$$\Rightarrow \dot{\sigma}_{ovk} = c_k \left(\dot{\varepsilon} - \frac{1}{\eta_k} \sigma_{ovk} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{\sigma}_{ovk} = c_k \dot{\varepsilon} - \frac{c_k}{\eta_k} \sigma_{ovk}, \quad \tau_{Rk} = \frac{\eta_k}{c_k} : \begin{cases} \text{Relaxationszeit der} \\ k\text{-ten Teilüberspannung} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\sigma}_{ovk} = c_k \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_{Rk}} \sigma_{ovk}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\dot{\sigma}_{\text{ovk}} + \frac{1}{\tau_{\text{Rk}}} \sigma_{\text{ovk}} \right) e^{\frac{t}{\tau_{\text{Rk}}}} = c_k e^{\frac{t}{\tau_{\text{Rk}}}} \dot{\varepsilon} \\
&\Rightarrow \left(\sigma_{\text{ovk}} e^{\frac{t}{\tau_{\text{Rk}}}} \right)' = c_k e^{\frac{t}{\tau_{\text{Rk}}}} \dot{\varepsilon} \\
&\Rightarrow \sigma_{\text{ovk}}(t) e^{\frac{t}{\tau_{\text{Rk}}}} - \sigma_{\text{ovk}}(0) = c_k \int_0^t e^{\frac{s}{\tau_{\text{Rk}}}} \dot{\varepsilon}(s) ds \\
&\Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{\text{ovk}}(t) = \int_0^t c_k e^{-\frac{t-s}{\tau_{\text{Rk}}}} \dot{\varepsilon}(s) ds}}
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert schließlich:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= E\varepsilon + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n c_k e^{-\frac{t-s}{\tau_{\text{Rk}}}} \right) \dot{\varepsilon}(s) ds \\
&\Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma(t) = \int_0^t \left(E + \sum_{k=1}^n c_k e^{-\frac{t-s}{\tau_{\text{Rk}}}} \right) \dot{\varepsilon}(s) ds}}
\end{aligned}$$

Im Vergleich zum einfachen Dreiparameter-Modell stehen hiermit also $2n+1$ Materialparameter zur Beschreibung des linear viskoelastischen Werkstoffverhaltens zur Verfügung. Die Relaxationsfunktion hat dabei die Form:

$$G(t) = E + \sum_{k=1}^n c_k e^{-\frac{t}{\tau_{\text{Rk}}}}$$

wobei die Parameter $\{c_k, \tau_k\}$ $k=1, \dots, n$ als diskretes Relaxationsspektrum bezeichnet werden. Die natürliche Darstellung dieses Modell liefert die aktuelle Spannung als Funktional des Deformationsprozesses.

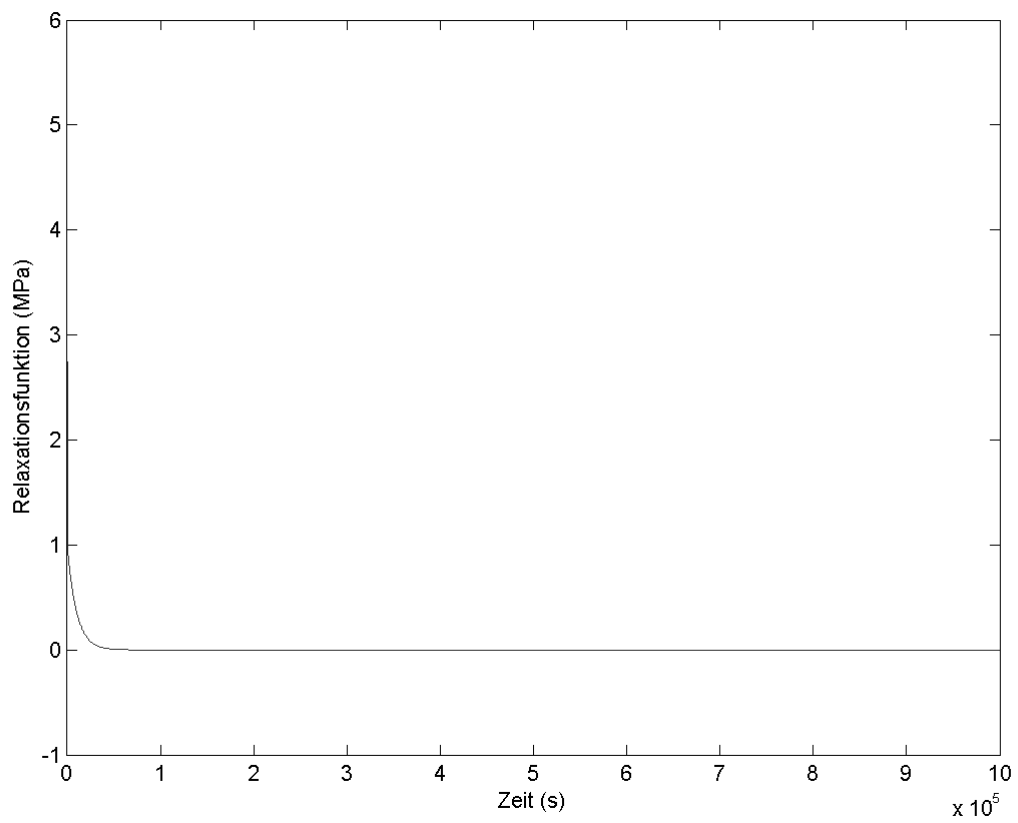
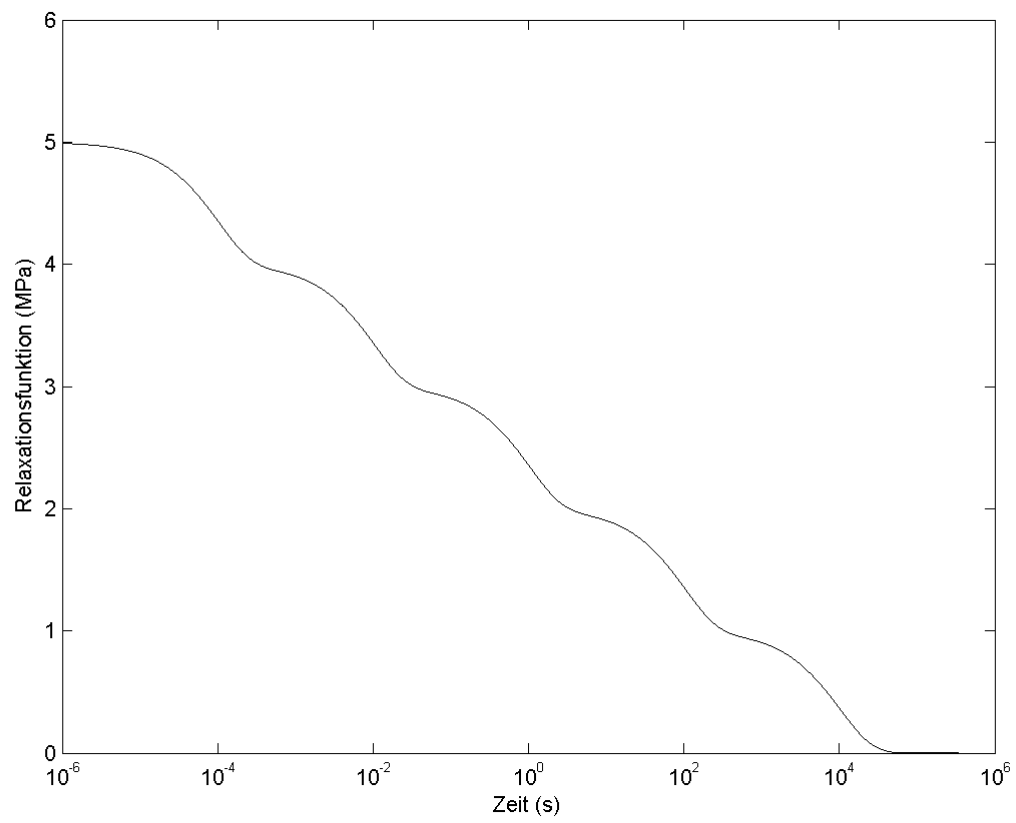


Abbildung 5-1 Relaxation über linearer und logarithmischer Zeitskala (5 Elemente)

5.2 Thermomechanische Konsistenz

Zum Nachweis der thermomechanischen Konsistenz wird die im rheologischen Modell gespeicherte freie Energie, d.h. die in den Federn gespeicherte mechanische Energie, formuliert:

$$\psi = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}})^2$$

Die Clausius-Duhem-Ungleichung $\sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} \geq 0$ muss von allen Modellgleichungen für beliebige Beanspruchungsprozesse erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= E \varepsilon \dot{\varepsilon} + \sum_{k=1}^n c_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}}) \dot{\varepsilon} - \sum_{k=1}^n c_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}}) \dot{\varepsilon}_{\text{ink}} \\ \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\psi} &= \left\{ \sigma - \left[E \varepsilon + \sum_{k=1}^n c_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}}) \right] \right\} \dot{\varepsilon} + \sum_{k=1}^n c_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}}) \dot{\varepsilon}_{\text{ink}} \geq 0 \end{aligned}$$

Damit diese Ungleichung für beliebige Dehnraten $\dot{\varepsilon}$ erfüllt werden kann, muss für die Spannung die Materialgleichung

$$\sigma = E \varepsilon + \sum_{k=1}^n c_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}}) = E \varepsilon + \sum_{k=1}^n \sigma_{\text{ovk}}$$

gelten. Um auch die verbleibende Restungleichung $\sum_{k=1}^n c_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}}) \dot{\varepsilon}_{\text{ink}} \geq 0$ zu erfüllen, werden für die inelastischen Dehnraten die Definitionen $\dot{\varepsilon}_{\text{ink}} = c_k / \eta_k (\varepsilon - \varepsilon_{\text{ink}})$, $\eta_k > 0$ gemacht. Setzt man diese in die Restungleichung ein, so folgt die thermomechanische Konsistenz.

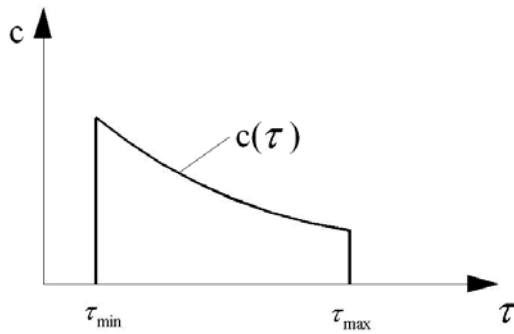
5.3 Kontinuierliches Relaxationsspektrum

Eine elegante Möglichkeit, dieses Konzept thermomechanisch konsistent zu verallgemeinern, besteht darin, ein kontinuierliches Relaxationsspektrum einzuführen:

$$G(t) = \int_0^{\infty} c(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau, \quad c(\tau) \geq 0$$

Dieser Ansatz für die Relaxationsfunktion hat den Vorteil, dass man bei einem Material mit sehr dicht liegenden Relaxationszeiten anstelle eines sehr viele Materialparameter beinhalten- den diskreten Relaxationsspektrums besser eine kontinuierliche Modulverteilungsfunktion $c(\tau)$ zur Beschreibung des Relaxationsverhaltens einführt.

Beispiel:



$$c(\tau) = \begin{cases} \frac{c_0}{\tau^2} & \text{für } \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(t) = c_0 \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{d\tau}{\tau^2},$$

$$\text{Substitution: } \frac{1}{\tau} = s \Rightarrow ds = -\frac{d\tau}{\tau^2}$$

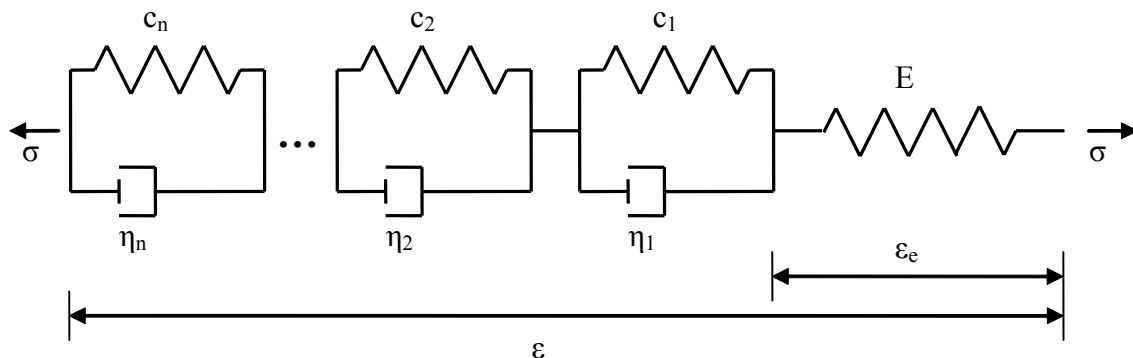
$$\Rightarrow G(t) = c_0 \int_{\frac{1}{\tau_{\max}}}^{\frac{1}{\tau_{\min}}} e^{-st} ds = -\frac{c_0}{t} \left[e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} \right]$$

$$\Rightarrow G(t) = \frac{c_0}{t} \left[e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} \right]$$

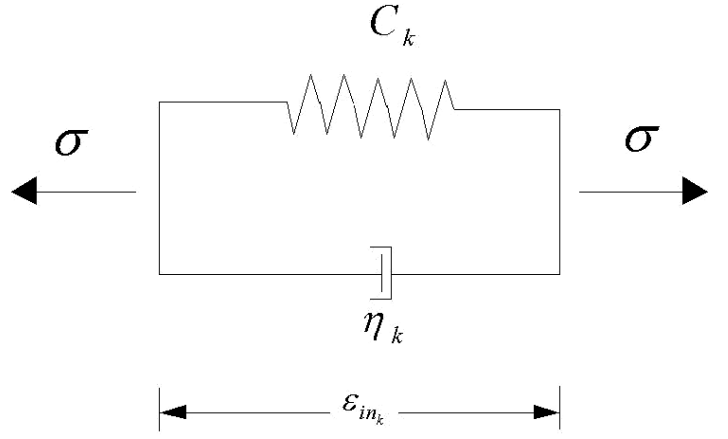
Mit Hilfe der kontinuierlichen Relaxationsspektren lassen sich Relaxationsfunktionen konstruieren, die im Fall von diskreten Spektren nur sehr schwer durch Superposition endlich vieler diskreter Exponentialfunktionen darstellbar sind.

5.4 Diskretes Retardationsspektrum

Eine weitere Möglichkeit, allgemeinere thermomechanisch konsistente Materialmodelle der linearen Viskoelastizität zu formulieren besteht darin, so genannte Kelvin-Modelle in Form einer Reihenschaltung zu superponieren. In diesem Fall erhält man als natürliche Darstellung des Materialmodells die aktuelle Dehnung als Funktional des Spannungsprozesses. Prinzipiell sind beide Darstellungsformen (Maxwell- und Kelvin Ketten) äquivalent.



$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_e + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ink} \\
\varepsilon_e &= \frac{\sigma}{E} \\
\sigma &= c_k \varepsilon_{ink} + \eta_k \dot{\varepsilon}_{ink} \\
\Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ink} &= \frac{1}{\eta_k} (\sigma - c_k \varepsilon_{ink}) \\
\Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ink} + \frac{c_k}{\eta_k} \varepsilon_{ink} &= \frac{1}{\eta_k} \sigma, \quad \frac{c_k}{\eta_k} = \frac{1}{\tau_{ck}} \\
\Rightarrow \left\{ \dot{\varepsilon}_{ink} + \frac{1}{\tau_{ck}} \varepsilon_{ink} \right\} e^{\frac{t}{\tau_{ck}}} &= \frac{1}{c_k \tau_{ck}} e^{\frac{t}{\tau_{ck}}} \sigma(t) \\
\Rightarrow \left(\varepsilon_{ink} e^{\frac{t}{\tau_{ck}}} \right)' &= \frac{1}{c_k} \left(\sigma e^{\frac{t}{\tau_{ck}}} \right)' - \frac{\dot{\sigma}}{c_k} e^{\frac{t}{\tau_{ck}}} \\
\Rightarrow \varepsilon_{ink}(t) e^{\frac{t}{\tau_{ck}}} - \varepsilon_{ink}(0) &= \frac{1}{c_k} \sigma(t) e^{\frac{t}{\tau_{ck}}} - \frac{\sigma(0)}{c_k} - \int_0^t e^{\frac{s}{\tau_{ck}}} \frac{\dot{\sigma}(s)}{c_k} ds \\
\Rightarrow \varepsilon_{ink}(t) &= \frac{\sigma(t)}{c_k} - \int_0^t \frac{1}{c_k} e^{-\frac{t-s}{\tau_{ck}}} \dot{\sigma}(s) ds \quad \text{mit } \sigma(0)=0 \text{ und } \varepsilon_{ink}(0)=0 \\
\varepsilon_{ink}(t) &= \int_0^t \frac{1}{c_k} \left\{ 1 - e^{-\frac{t-s}{\tau_{ck}}} \right\} \dot{\sigma}(s) ds
\end{aligned}$$



Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \left\{ 1 - e^{-\frac{t-s}{\tau_{ck}}} \right\} \dot{\sigma}(s) ds \\
&\Leftrightarrow \\
\varepsilon(t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{E} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \left\{ 1 - e^{-\frac{t-s}{\tau_{ck}}} \right\} \right) \dot{\sigma}(s) ds
\end{aligned}$$

Diese Formulierung erlaubt eine direkte und sehr einfache Beschreibung von Kriechversuchen. Auch hierbei lässt sich in Analogie zur Relaxationsdarstellung ein kontinuierliches Kriechspektrum einführen. Die Parameter $\{c_k, \tau_{ck}\}$ entsprechen einem diskreten Kriechspektrum und die Retardationsfunktion hat die folgende Form:

$$J(t) = \frac{1}{E} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{ck}}} \right\}$$

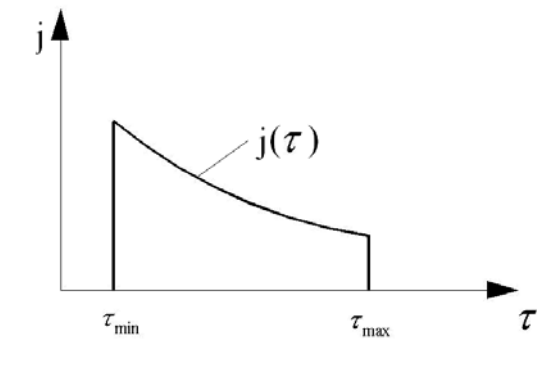
5.5 Kontinuierliches Retardationsspektrum

Die formale Verallgemeinerung der letzten Gleichung auf ein kontinuierliches Spektrum lautet:

$$J(t) = \int_0^{\infty} j(\tau) \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} d\tau$$

Dabei beschreibt die Materialfunktion bzw. das Retardationsspektrum $j(\tau)$ eine kontinuierliche Nachgiebigkeitsverteilung. Um zu verstehen, welche Art von Kriechfunktionen man damit abbilden kann, wird das folgende Beispiel betrachtet.

Beispiel: kontinuierliches Kriechspektrum in Form einer abgeschnittenen Hyperbel



$$j(\tau) = \begin{cases} \frac{j_0}{\tau^2} & \text{für } \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow J(t) = j_0 \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad \frac{1}{\tau} = s \Rightarrow ds = -\frac{d\tau}{\tau^2}$$

$$\Rightarrow J(t) = j_0 \int_{\frac{1}{\tau_{\max}}}^{\frac{1}{\tau_{\min}}} (1 - e^{-st}) ds = j_0 \left[\frac{t}{\tau_{\min}} - \frac{t}{\tau_{\max}} \right] + \frac{j_0}{t} \left[e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} \right]$$

$$\Rightarrow J(t) = j_0 \left\{ \frac{t}{\tau_{\min}} - \frac{t}{\tau_{\max}} + \frac{1}{t} \left[e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}} \right] \right\}$$

6 Relationen zwischen den Zeit- und Frequenzbereichsfunktionen

Bei der Formulierung eines allgemeinen Materialmodells der linearen Viskoelastizität kann entweder die Dehnung oder die Spannung als unabhängige Variable gewählt werden:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds \Leftrightarrow \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-s) \dot{\sigma}(s) ds$$

Wenn durch die beiden obigen Materialgleichungen ein und derselbe Werkstoff dargestellt wird, d.h. im einen Fall bei dehnungsgesteuerten Prozessen und im anderen Fall bei spannungsgesteuerten Prozessen, dann können die beiden Funktionen $G(t)$ und $J(t)$ nicht unabhängig voneinander sein. Dies wird im Folgenden nachgewiesen:

6.1 Zusammenhang zwischen Zeitbereichsfunktionen

Berechnung der Spannungsantwort für einen Zugversuch unter Dehnungsvorgabe mit konstanter Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \begin{cases} \dot{\varepsilon}_0 t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} * \\ \Rightarrow \sigma(t) &= \dot{\varepsilon}_0 \int_0^t G(t-s) ds = \dot{\varepsilon}_0 \int_0^t G(s) ds \\ \Leftrightarrow \dot{\sigma}(t) &= \dot{\varepsilon}_0 G(t) \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Spannungsantwort in die Kriechdarstellung ein, so muss die ursprüngliche Dehnungsgeschichte * wieder herauskommen. (für $t \geq 0$):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_0 t &= \int_0^t J(t-s) \dot{\varepsilon}_0 G(s) ds \\ \Rightarrow \boxed{t} &= \int_0^t J(t-s) G(s) ds = \int_0^t J(s) G(t-s) ds \end{aligned}$$

Dies ist eine Volterrasche Integralgleichung der ersten Art mit der prinzipiell für eine gegebene Relaxationsfunktion $G(t)$ die zugehörige Kriechfunktion $J(t)$ berechnet werden kann (und umgekehrt). Mit Hilfe der Substitutionsregel weist man nach, dass bei diesem Integraltyp die Argumente s und $t-s$ vertauscht werden dürfen. Die Zeitableitung dieser Integralgleichung führt auf eine Volterrasche Integralgleichung der zweiten Art, welche durch Iterati-

on gelöst werden kann (siehe z.B. Schmeidler, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik):

$$1 = J(0)G(t) + \int_0^t \dot{J}(t-s)G(s)ds$$

$$\Rightarrow G(t) = \frac{1}{J(0)} \left\{ 1 - \int_0^t \dot{J}(t-s)G(s)ds \right\}$$

Iterationsverfahren : $G_0(t) = \frac{1}{J_0}$

$$G_1(t) = \frac{1}{J(0)} \left\{ 1 - \int_0^t \dot{J}(t-s)G_0(s)ds \right\}$$

$$G_2(t) = \frac{1}{J(0)} \left\{ 1 - \int_0^t \dot{J}(t-s)G_1(s)ds \right\}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$G_n(t) = \frac{1}{J(0)} \left\{ 1 - \int_0^t \dot{J}(t-s)G_{n-1}(s)ds \right\}$$

Aus der Integralgleichung

$$t = \int_0^t J(t-s)G(s)ds$$

können durch Bildung von Grenzwerten zwei Folgerungen gezogen werden, die Beziehungen zwischen den asymptotischen Werten von $G(t)$ und $J(t)$ herstellen.

Substitution: $s = tx \Rightarrow ds = t dx$

$$\Rightarrow 1 = \int_0^1 J(t[1-x])G(tx)dx$$

Bildet man den Limes $t \rightarrow 0$ und alternativ $t \rightarrow \infty$ unter dem Integralzeichen, so ergibt sich:

$$\underline{\underline{1 = J(0)G(0)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{1 = J(\infty)G(\infty)}}$$

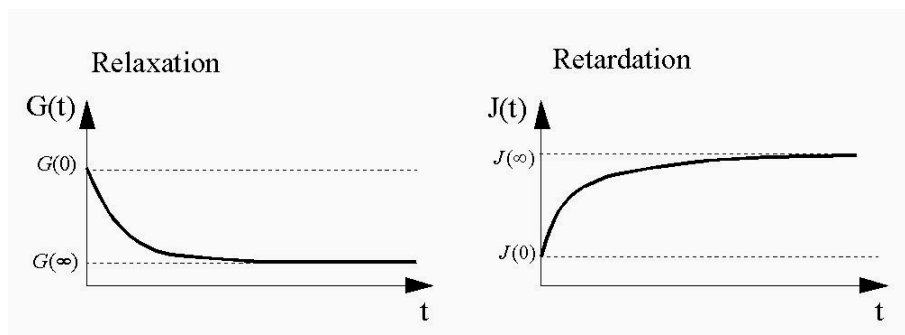


Abbildung 6-1 Relaxation und Retardation

6.2 Dehnungsgesteuerte Anregung im Frequenzbereich

Nachdem eine Beziehung zwischen den beiden Zeitfunktionen $G(t)$ und $J(t)$ formuliert wurde, wird nun eine entsprechende Relation im Frequenzbereich gesucht:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds, \quad \text{sei } \varepsilon \equiv 0 \text{ für } t \rightarrow -\infty \text{ (o.B.d.A.)} \\ \Rightarrow \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t [G(t-s) - G(\infty)] \dot{\varepsilon}(s) ds + \int_{-\infty}^t G(\infty) \dot{\varepsilon}(s) ds \\ \Rightarrow \sigma(t) &= G(\infty) \varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t [G(t-s) - G(\infty)] \dot{\varepsilon}(s) ds\end{aligned}$$

Substitution $t-s = x$, $-ds = dx$ und danach wieder umbenennen der Variablen.

$$\Leftrightarrow \sigma(t) = G(\infty) \varepsilon(t) + \int_0^{\infty} [G(s) - G(\infty)] \dot{\varepsilon}(t-s) ds$$

Eine dehnungsgesteuerte komplexe Anregung im Frequenzbereich der Form $\varepsilon(t) = \Delta \varepsilon e^{i\omega t}$ liefert die Beziehung $\dot{\varepsilon}(t-s) = i\omega \Delta \varepsilon e^{-i\omega s} e^{i\omega t} = i\omega e^{-i\omega s} \varepsilon(t)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sigma(t) &= \left[G(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} e^{-i\omega s} ds \right] \varepsilon(t) \\ \Rightarrow \sigma(t) &= G^*(\omega) \varepsilon(t)\end{aligned}$$

Dabei ist die Funktion $G^*(\omega) = G(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} e^{-i\omega s} ds$ der komplexe Modul eines allgemeinen linear viskoelastischen Materials. Er kann also aus der Relaxationsfunktion $G(t)$ berechnet werden. Der Grenzwert $G(\infty)$ existiert immer.

Aus der Eulerschen Formel $i e^{-i\omega s} = i(\cos \omega s - i \sin \omega s) = i \cos \omega s + \sin \omega s$ folgt:

$$\begin{aligned}G^*(\omega) &= G(\infty) + \omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} \sin \omega s ds + i\omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} \cos \omega s ds \\ G^*(\omega) &= G'(\omega) + iG''(\omega)\end{aligned}$$

Dabei ist die Funktion

$$G'(\omega) = G(\infty) + \omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} \sin \omega s ds$$

der Speichermodul und die Funktion

$$G''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} \cos \omega s ds$$

der Verlustmodul. Setzt man eine komplexe harmonische Dehnungsanregung in die Beziehung $\sigma(t) = G^*(\omega) \varepsilon(t)$ ein, so folgt:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= G^*(\omega) \varepsilon(t) = G^*(\omega) \Delta \varepsilon e^{i\omega t} \\ \sigma(t) &= (G' + iG'') \Delta \varepsilon (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ \sigma(t) &= \Delta \varepsilon [(G' \cos \omega t - G'' \sin \omega t) + i(G' \sin \omega t + G'' \cos \omega t)]\end{aligned}$$

Betrachtet man jeweils die Real- und die Imaginärteile der Dehnungsanregung und der Spannungsantwort, so erkennt man, dass $G'(\omega)$ jeweils mit dem Spannungsanteil verknüpft ist, der in Phase mit der Dehnungsanregung ist. Daher kommt der Name Speichermodul. Der mit $G''(\omega)$ verknüpfte Spannungsanteil ist jeweils in Phase mit der Dehnungsgeschwindigkeit, woher der Name Verlustmodul kommt. Die beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}G'(\omega) &= G(\infty) + \omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} \sin \omega s \, ds \\ G''(\omega) &= \omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} \cos \omega s \, ds\end{aligned}$$

sind die Fourierkosinus- und die Fouriersinustransformation der Relaxationsfunktion $G(t)$. Durch Invertierung kann aus beiden Funktionalen die Relaxationsfunktion ermittelt werden (siehe z.B. Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik):

$$\begin{aligned}G(t) &= G(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G'(\omega) - G(\infty)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega \\ G(t) &= G(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G''(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega\end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Beziehungen gleich, so hat man eine allgemeine Relation zwischen Speicher- und Verlustmodul gefunden.

$$\underline{\underline{\int_0^{\infty} \frac{G'(\omega) - G(\infty)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \int_0^{\infty} \frac{G''(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega}}$$

Nachdem die linearen Viskoelastizitätsmodelle für dehnungsgesteuerte Prozesse untersucht wurden, werden nun die entsprechenden Darstellungen für Spannungssteuerung in den Frequenzbereich transformiert.

6.3 Spannungsgesteuerte Anregung im Frequenzbereich

Nun sollen entsprechende Relationen gefunden werden, welche die Zusammenhänge zwischen den Kriech- und Nachgiebigkeitsfunktionen darstellen. Hierzu wird auf der Kriechdarstellung des allgemeinen Materialmodells der linearen eindimensionalen Viskoelastizität aufgesetzt und angenommen, dass der asymptotische Grenzwert $J(\infty)$ existiert, andernfalls muss der Grenzwert $J(0)$ verwendet werden.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^t J(t-s) \dot{\sigma}(s) ds, \quad \sigma \equiv 0 \text{ für } t \rightarrow -\infty \text{ (o.B.d.A.)} \\ \varepsilon(t) &= J(\infty) \sigma(t) - \int_{-\infty}^t \{J(\infty) - J(t-s)\} \dot{\sigma}(s) ds \\ &\text{(Substitution: } t-s=x) \\ \Rightarrow \varepsilon(t) &= J(\infty) \sigma(t) - \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} \dot{\sigma}(t-s) ds \end{aligned}$$

In diese Relation wird nun eine harmonische Spannungsanregung der Form $\sigma(t) = \Delta \sigma e^{i\omega t}$ eingesetzt, woraus sich $\dot{\sigma}(t-s) = i\omega e^{-i\omega s} \Delta \sigma e^{i\omega t} = i\omega e^{-i\omega s} \sigma(t)$ ergibt und die Beziehung

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon(t) &= \left\{ J(\infty) - i\omega \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} e^{-i\omega s} ds \right\} \sigma(t) \\ \Rightarrow \varepsilon(t) &= J^*(\omega) \sigma(t) \end{aligned}$$

für die Dehnungsantwort folgt. Die Funktion

$$J^*(\omega) = J(\infty) - i\omega \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} e^{-i\omega s} ds$$

ist die komplexe (dynamische) Nachgiebigkeit des linear viskoelastischen Materials. In Analogie zum komplexen Modul gilt:

$$\begin{aligned} J^*(\omega) &= J(\infty) - \omega \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} \sin \omega s ds - i\omega \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} \cos \omega s ds \\ J^*(\omega) &= J'(\omega) - iJ''(\omega) \end{aligned}$$

Dabei ist die Funktion:

$$J'(\omega) = J(\infty) - \omega \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} \sin \omega s ds$$

die Speichernachgiebigkeit des betrachteten Materials und

$$J''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} \cos \omega s ds$$

die Verlustnachgiebigkeit. Invertiert man diese beiden Funktionale, so kann daraus die Retardations- bzw. Kriechfunktion ermittelt werden:

$$J(t) = J(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J'(\omega) - J(\infty)}{\omega} \sin \omega t d\omega$$

bzw.

$$J(t) = J(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J''(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega$$

Setzt man diese Beziehungen gleich, so erhält man eine Relation zwischen der frequenzabhängigen Speichernachgiebigkeit J' und der entsprechenden Verlustnachgiebigkeit J'' :

$$\int_0^{\infty} \frac{J(\infty) - J'(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \int_0^{\infty} \frac{J''(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega$$

Aus den beiden, im Frequenzbereich geltenden, komplexen Beziehungen bei Spannungs- und Dehnungssteuerung $\sigma = G^*(\omega)\varepsilon$ und $\varepsilon = J^*(\omega)\sigma$ folgt schließlich:

$$1 = G^*(\omega) J^*(\omega)$$

Das heißt: der komplexe Dynamische Modul $G^*(\omega)$ ist der Kehrwert der komplexen dynamischen Nachgiebigkeit $J^*(\omega)$.

Anhand dieser Betrachtungen wurden die zwischen den Zeit- und Frequenzbereichsfunktionen bestehenden mathematischen Relationen hergeleitet. Sie werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Zusammenfassung der mathematischen Beziehungen zwischen den Zeit- und Frequenzbereichsfunktionen der linearen Viskoelastizität

		Gegebene Materialfunktionen			
Gesuchte Materialfunktion		$G(t)$	$J(t)$	$G^*(\omega) = G' + iG''$	$J^*(\omega) = J' + iJ''$
	$G(t)$		$t = \int_0^t J(t-s)G(s)ds$	$G(t) = G(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'(\omega) - G(\infty)}{\omega} \cdot \sin \omega t d\omega$	$t = \int_0^t G(t-s)(J(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J'(\omega) - J(\infty)}{\omega} \cdot \sin \omega s d\omega) ds$
	$J(t)$	$t = \int_0^t G(t-s)J(s)ds$		$t = \int_0^t J(t-s)(G(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'(\omega) - G(\infty)}{\omega} \cdot \sin \omega s d\omega) ds$	$J(t) = J(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J'(\omega) - J(\infty)}{\omega} \cdot \sin \omega t d\omega$
	$G^*(\omega)$	$G^*(\omega) = G(\infty) + i\omega \int_0^\infty \{G(s) - G(\infty)\} \cdot e^{-i\omega s} ds$	$J^*(\omega) = 1/(J(\infty) - i\omega \int_0^\infty \{J(\infty) - J(s)\} \cdot e^{i\omega s} ds)$		$G^*(\omega) = \frac{1}{J^*(\omega)}$
	$J^*(\omega)$	$J^*(\omega) = 1/(G(\infty) - i\omega \int_0^\infty \{G(s) - G(\infty)\} \cdot e^{-i\omega s} ds)$	$J^*(\omega) = J(\infty) - i\omega \int_0^\infty \{J(\infty) - J(s)\} \cdot e^{-i\omega s} ds$	$J^*(\omega) = \frac{1}{G^*(\omega)}$	

Aus einer beliebigen dieser insgesamt vier Funktionen $G(t)$, $J(t)$, $G^*(\omega)$, $J^*(\omega)$ können prinzipiell alle anderen ausgerechnet werden.

7 Komplexer Modul für diskrete und kontinuierliche Spektren

Diskretes Relaxationsspektrum

$$G(t) = G(\infty) + \sum_{k=1}^n G_k e^{-\nu_k t}, \quad \nu_k = \frac{1}{\tau_k} \begin{pmatrix} \text{reziproke Relaxationszeit} \\ \text{bzw. Relaxationsfrequenz} \end{pmatrix}$$

Kontinuierliches Relaxationsspektrum

$$G(t) = G(\infty) + \int_0^{\infty} g(\nu) e^{-\nu t} d\nu$$

Komplexer Modul

$$G^*(\omega) = G(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} \{G(s) - G(\infty)\} e^{-i\omega s} ds$$

7.1 Berechnung des komplexen Moduls für diskretes Relaxationsspektrum

$$\begin{aligned} G^*(\omega) &= G(\infty) + i\omega \sum_{k=1}^n G_k \int_0^{\infty} e^{-(\nu_k + i\omega)s} ds \\ G^*(\omega) &= G(\infty) + i\omega \sum_{k=1}^n G_k \frac{-1}{\nu_k + i\omega} \left[e^{-(\nu_k + i\omega)s} \right]_0^{\infty} \\ G^*(\omega) &= G(\infty) + \sum_{k=1}^n G_k \frac{i\omega}{\nu_k + i\omega} \\ G^*(\omega) &= G(\infty) + \underbrace{\sum_{k=1}^n G_k \frac{\omega^2}{\nu_k^2 + \omega^2}}_{G'(\omega)} + i \underbrace{\sum_{k=1}^n G_k \frac{\nu_k \omega}{\nu_k^2 + \omega^2}}_{G''(\omega)} \end{aligned}$$

7.2 Berechnung des komplexen Moduls für kontinuierliches Spektrum

$$\begin{aligned} G^*(\omega) &= G(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\nu) e^{-(\nu + i\omega)s} d\nu ds \\ G^*(\omega) &= G(\infty) + i\omega \int_0^{\infty} g(\nu) \left(\int_0^{\infty} e^{-(\nu + i\omega)s} ds \right) d\nu \\ G^*(\omega) &= G(\infty) + \int_0^{\infty} g(\nu) \frac{i\omega}{\nu + i\omega} d\nu \quad * \\ G^*(\omega) &= G(\infty) + \underbrace{\int_0^{\infty} g(\nu) \frac{\omega^2}{\nu^2 + \omega^2} d\nu}_{G'(\omega)} + i \underbrace{\int_0^{\infty} g(\nu) \frac{\nu \omega}{\nu^2 + \omega^2} d\nu}_{G''(\omega)} \end{aligned}$$

An diesen Darstellungen erkennt man jeweils die charakteristische funktionale Form der dynamischen Moduli als Funktional eines diskreten oder kontinuierlichen Relaxationsspektrums.

7.3 Die Stieltjes Transformation

Stellt man die Gleichung * von Kapitel 7.2 auf der letzten Seite um, so ergibt sich die folgende Beziehung:

$$\frac{G^*(\omega) - G(\infty)}{i\omega} = \int_0^\infty g(\nu) \frac{1}{\nu + i\omega} d\nu$$

Das Funktional auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die so genannte Stieltjes Transformation des Relaxationsspektrums $g(\nu)$:

$$S(i\omega) = \int_0^\infty g(\nu) \frac{1}{\nu + i\omega} d\nu$$

Wenn es gelingt, diese Transformation zu invertieren, so kann das Relaxationsspektrum $g(\nu)$ aus dem dynamischen Modul berechnet werden. Hierzu wird das Integral

$$S(z) = \int_0^\infty g(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda + z}$$

betrachtet. Dabei ist $z = -\nu + i\gamma$ eine beliebige komplexe Zahl mit negativem Realteil, d.h. $\nu \geq 0$. Nun wird der folgende Ausdruck gebildet:

$$\begin{aligned} S(-\nu - i\gamma) - S(-\nu + i\gamma) &= \int_0^\infty g(\lambda) \left\{ \frac{1}{(\lambda - \nu) - i\gamma} - \frac{1}{(\lambda - \nu) + i\gamma} \right\} d\lambda \\ &= 2i \int_0^\infty \frac{g(\lambda) \gamma}{(\lambda - \nu)^2 + \gamma^2} d\lambda \end{aligned}$$

Substitution: $\lambda - \nu = \gamma u \Rightarrow d\lambda = \gamma du$

$$S(-\nu - i\gamma) - S(-\nu + i\gamma) = 2i \int_{-\frac{\nu}{\gamma}}^\infty \frac{g(\nu + \gamma u)}{1 + u^2} du$$

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \{S(-\nu - i\gamma) - S(-\nu + i\gamma)\} &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} 2i \int_{-\frac{\nu}{\gamma}}^\infty \frac{g(\nu + \gamma u)}{1 + u^2} du \\ &= 2ig(\nu) \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{1 + u^2} = 2\pi i g(\nu) \end{aligned}$$

Dabei wurde die Formel $\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{1 + u^2} = \pi$ verwendet.

$$\Rightarrow g(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \{S(-\nu - i\gamma) - S(-\nu + i\gamma)\} \left(\begin{array}{l} \text{inverse Stieltjes -} \\ \text{Transformation} \end{array} \right)$$

Setzt man nun für die Funktion S den entsprechenden Ausdruck mit dem dynamischen Modul ein, so ergibt sich die einfache algebraische Beziehung

$$\underline{\underline{g(v) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{G^*(-v - i\gamma) - G(\infty)}{-v - i\gamma} - \frac{G^*(-v + i\gamma) - G(\infty)}{-v + i\gamma} \right\}}}}$$

zur Berechnung des Relaxationsspektrums aus dem komplexen dynamischen Modul. Da der Grenzwert $G(\infty)$ immer existiert, ist diese Beziehung immer anwendbar.

Beispiel: Berechnung des Relaxationsspektrums einer Maxwell-Kette:

$$\begin{aligned} G^*(i\omega) &= G(\infty) + \sum_{k=1}^n G_k \frac{i\omega}{v_k + i\omega} \\ \Rightarrow \frac{G^*(i\omega) - G(\infty)}{i\omega} &= \sum_{k=1}^n G_k \frac{1}{v_k + i\omega} \\ g(v) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n G_k \left\{ \frac{1}{v_k - v - i\gamma} - \frac{1}{v_k - v + i\gamma} \right\} \\ g(v) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n G_k \left\{ \frac{\gamma}{(v_k - v)^2 + \gamma^2} \right\} \\ g(v) &= \sum_{k=1}^n G_k \underbrace{\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(v_k - v)^2 + \gamma^2} \right\}}_{\text{Darstellungsformel von Dirac-Funktionen an den Stellen } v=v_k} = \sum_{k=1}^n G_k \delta(v - v_k) \end{aligned}$$

Definition der Dirac-Funktionen:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\text{oder: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

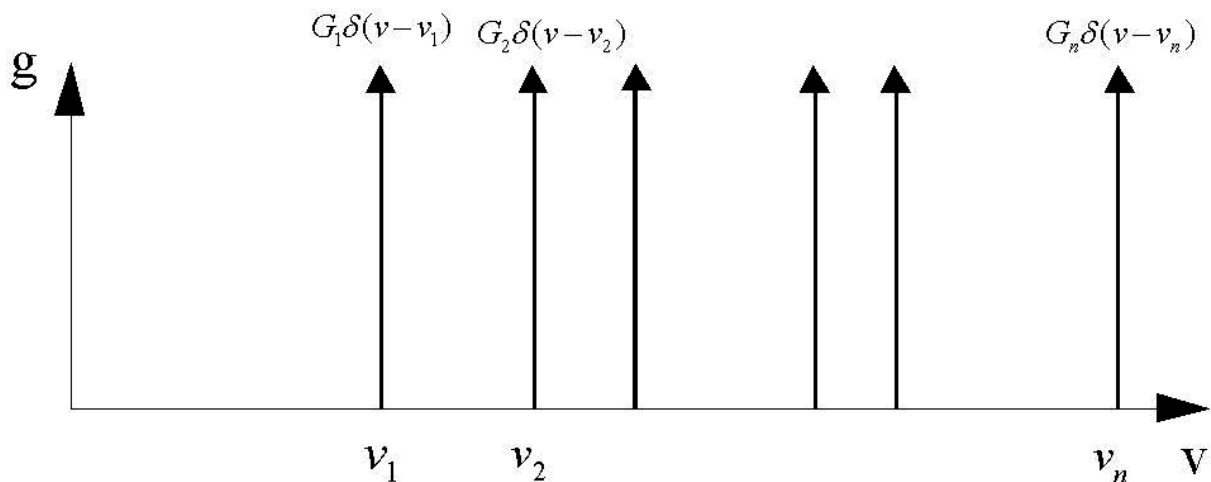


Abbildung 7-1 Dirac Funktionen an den Stellen v_k

Das Relaxationsspektrum einer Maxwell-Kette hat das Aussehen eines Kamms mit unendlich hohen Spitzen. Die Positionen dieser Spitzen sind die diskreten Relaxationsfrequenzen v_k .

8 Komplexe Nachgiebigkeit für diskrete und kontinuierliche Spektren

Diskretes Retardationspektrum

$$J(t) = J(0) + \sum_{k=1}^n J_k (1 - e^{-v_k t}) \quad *$$

Kontinuierliches Relaxationsspektrum

$$J(t) = J(0) + \int_0^{\infty} j(v) (1 - e^{-vt}) dv \quad **$$

Komplexe Nachgiebigkeit

$$J^*(\omega) = J(\infty) - i\omega \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s)\} e^{-i\omega s} ds$$

8.1 Komplexe Nachgiebigkeit für diskretes Retardationspektrum

$$J(\infty) = J(0) + \sum_{k=1}^n J_k \quad (\text{ergibt sich aus } * \text{ für } t \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow J(t) = J(\infty) - \sum_{k=1}^n J_k e^{-v_k t}$$

$$J^*(\omega) = J(\infty) - i\omega \sum_{k=1}^n J_k \int_0^{\infty} e^{-(v_k + i\omega)s} ds$$

$$J^*(\omega) = J(\infty) - i\omega \sum_{k=1}^n J_k \frac{-1}{v_k + i\omega} \left[e^{-(v_k + i\omega)s} \right]_0^{\infty}$$

$$J^*(\omega) = J(\infty) - \sum_{k=1}^n J_k \frac{i\omega}{v_k + i\omega}$$

$$J^*(\omega) = J(\infty) - \underbrace{\sum_{k=1}^n J_k \frac{\omega^2}{v_k^2 + \omega^2}}_{J'(\omega)} - i \underbrace{\sum_{k=1}^n J_k \frac{v_k \omega}{v_k^2 + \omega^2}}_{J''(\omega)}$$

8.2 Komplexe Nachgiebigkeit für kontinuierliches Retardationsspektrum

$$\begin{aligned}
 J^*(\omega) &= J(\infty) - i\omega \int_0^\infty \int_0^\infty j(v) e^{-(v+i\omega)s} dv ds \\
 J^*(\omega) &= J(\infty) - i\omega \int_0^\infty j(v) \left(\int_0^\infty e^{-(v+i\omega)s} ds \right) dv \\
 J^*(\omega) &= J(\infty) - \int_0^\infty j(v) \frac{i\omega}{v+i\omega} dv \\
 J^*(\omega) &= J(\infty) - \underbrace{\int_0^\infty j(v) \frac{\omega^2}{v^2 + \omega^2} dv}_{J'(\omega)} - i \underbrace{\int_0^\infty j(v) \frac{v\omega}{v^2 + \omega^2} dv}_{J''(\omega)} \\
 \Rightarrow \frac{J(\infty) - J^*(\omega)}{i\omega} &= \int_0^\infty \frac{j(v)}{v+i\omega} dv
 \end{aligned}$$

Analog zum Zusammenhang zwischen dynamischem Modul $G^*(\omega)$ und Relaxationsspektrum $g(v)$ hängt auch die dynamische Nachgiebigkeit $J^*(\omega)$ über eine Stieltjes-Transformation mit dem Retardationsspektrum $j(v)$ zusammen. Durch Invertierung dieser Transformation erhält man in Analogie zum Vorgehen des vorherigen Kapitels:

$$\underline{\underline{j(v) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{J(\infty) - J^*(-v - i\gamma)}{-v - i\gamma} - \frac{J(\infty) - J^*(-v + i\gamma)}{-v + i\gamma} \right\}}}}$$

Das Kriechspektrum kann also vergleichsweise einfach aus der komplexen dynamischen Nachgiebigkeit berechnet werden.

Bemerkung: Die obige Beziehung zur Ermittlung des Kriechspektrums ist nur dann anwendbar, wenn der Grenzwert der Kriechfunktion für $t \rightarrow \infty$ existiert, also wenn das Kriechen beschränkt ist. Andernfalls muss eine äquivalente Formulierung mit dem Bezugswert $J(0)$ hergeleitet werden, was kein Problem darstellt und nun gezeigt wird. Hierzu wird der Zusammenhang zwischen der Kriechfunktion und der komplexen Nachgiebigkeit partiell integriert:

$$\begin{aligned}
 J^*(\omega) &= J(\infty) - i\omega \int_0^\infty \underbrace{(J(\infty) - J(s))}_u \underbrace{e^{-i\omega s}}_{v'} ds = \\
 &= J(\infty) + (J(\infty) - J(s)) e^{-i\omega s} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty J'(s) e^{-i\omega s} ds \\
 \Rightarrow \underline{\underline{J^*(\omega) &= J(0) + \int_0^\infty J'(s) e^{-i\omega s} ds}}
 \end{aligned}$$

Setzt man in diese Beziehung nun die spektrale Darstellung der zeitlich abgeleiteten Kriechfunktion

$$J'(t) = \frac{d}{dt} \left(J(0) + \int_0^\infty j(v) (1 - e^{-vt}) dv \right) = \int_0^\infty v j(v) e^{-vt} dv$$

ein, so ergibt sich die Beziehung

$$J^*(\omega) = J(0) + \int_0^\infty \int_0^\infty v j(v) e^{-(v+i\omega)s} dv ds.$$

Nach Ausführung der Integration über die Variable s findet man den gesuchten Zusammenhang:

$$J^*(\omega) = J(0) + \int_0^\infty \frac{v j(v)}{v + i\omega} dv$$

Wendet man nun die in Kapitel 7.3 definierte inverse Stieltjes Transformation an, so ergibt sich

$$\underline{\underline{j(v) = \frac{1}{2\pi v i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \{J(-v - i\gamma) - J(-v + i\gamma)\}}}$$

für die Bestimmung des Kriechspektrums aus der komplexen dynamischen Nachgiebigkeit.

9 Beziehungen zwischen den Relaxations- und Kriechspektren

Da der frequenzabhängige komplexe Modul mit der komplexen Nachgiebigkeitsfunktion gemäß $J^*(\omega)G^*(\omega)=1$ zusammenhängt und auch Beziehungen zwischen der Relaxations- und der Kriechfunktion existieren, liegt die Vermutung nahe, dass auch zwischen den Relaxations- und Kriechspektren $h(v)$ und $j(v)$ mathematische Beziehungen bestehen.

9.1 Überblick

$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds$	$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-s) \dot{\sigma}(s) ds$
$\hat{\sigma} = G^*(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega)$	$\hat{\varepsilon} = J^*(\omega) \hat{\sigma}(\omega)$
$G(t) = G(\infty) + \int_0^\infty g(v) e^{-vt} dv$	$J(t) = J(0) + \int_0^\infty j(v) (1 - e^{-vt}) dv$
$G^*(\omega) = G(\infty) + \int_0^\infty g(v) \frac{i\omega}{v + i\omega} dv$	$J^*(\omega) = J(\infty) - \int_0^\infty j(v) \frac{i\omega}{v + i\omega} dv$

In Kapitel 6 wurden die allgemeinen mathematischen Zusammenhänge zwischen den Zeit- und Frequenzbereichsfunktionen $G(t)$, $J(t)$, $G^*(\omega)$ und $J^*(\omega)$ der linearen Viskoelastizitätstheorie formuliert, die unabhängig von speziellen Darstellungen z.B. durch parallel geschaltete Maxwell-Elemente oder in Reihe geschaltete Kelvin-Elemente gelten. Stellt man die Zeitbereichsfunktionen $G(t)$ und $J(t)$ durch die kontinuierlichen Relaxations- und Kriechspektren $g(v)$ und $j(v)$ dar, so erkennt man, dass auch $G^*(\omega)$ und $J^*(\omega)$ durch $g(v)$ und $j(v)$ darstellbar sind. Gesucht sind nun die Beziehungen zwischen den beiden kontinuierlichen Spektren $g(v)$ und $j(v)$.

9.2 Herleitung der Beziehungen

Komplexer Modul

Ausgehend von der bekannten und in Kapitel 4.4 hergeleiteten Beziehung

$$G^*(\omega) = G(\infty) + i\omega \underbrace{\int_0^\infty (G(s) - G(\infty)) ds}_u \underbrace{e^{-i\omega s}}_{v'}$$

zwischen der Relaxationsfunktion $G(t)$ und dem komplexem Modul in welcher der statische Gleichgewichtsmodul $G(\infty)$ als Bezugsgröße vorkommt, wird nun eine äquivalente Bezie-

hung durch partielle Integration hergeleitet, in welcher der spontane Modul $G(0)$ als Bezug vorkommt:

$$G^*(\omega) = G(\infty) - \left[\{G(s) - G(\infty)\} e^{-i\omega s} \right]_0^\infty + \int_0^\infty G'(s) e^{-i\omega s} ds$$

$$G^*(\omega) = G(\infty) - \left[-\{G(0) - G(\infty)\} 1 \right] + \int_0^\infty G'(s) e^{-i\omega s} ds$$

$$\underline{G^*(\omega) = G(0) + \int_0^\infty G'(s) e^{-i\omega s} ds}$$

Komplexe Nachgiebigkeit

Eine analoge Formulierung wird durch partielle Integration für die komplexe Nachgiebigkeit hergeleitet:

$$J^*(\omega) = J(\infty) - i\omega \int_0^\infty \{J(\infty) - J(s)\} e^{-i\omega s} ds$$

$$\underline{J^*(\omega) = J(0) + \int_0^\infty J'(s) e^{-i\omega s} ds}$$

Mit den Spektraldarstellungen der abgeleiteten Relaxations- und Kriechfunktionen

$$G'(t) = - \int_0^\infty v g(v) e^{-vt} dv$$

und

$$J'(t) = \int_0^\infty v j(v) e^{-vt} dv$$

folgt für den komplexen Modul und die komplexe Nachgiebigkeit:

$$G^*(\omega) = G(0) - \int_0^\infty \int_0^\infty v g(v) e^{-(v+i\omega)s} dv ds$$

$$G^*(\omega) = G(0) - \int_0^\infty v g(v) \left(\int_0^\infty e^{-(v+i\omega)s} ds \right) dv$$

$$\underline{G^*(\omega) = G(0) - \int_0^\infty \frac{v g(v)}{v + i\omega} dv}$$

$$J^*(\omega) = J(0) + \int_0^\infty \int_0^\infty v j(v) e^{-(v+i\omega)s} dv ds$$

$$\underline{J^*(\omega) = J(0) + \int_0^\infty \frac{v j(v)}{v + i\omega} dv}$$

Durch Umformen der beiden gewonnenen Ausdrücke für $G^*(\omega)$ und $J^*(\omega)$ und Benutzung der Beziehung $G^*(\omega)J^*(\omega)=1$ lässt sich der gesuchte Zusammenhang zwischen den Relaxations- und Retardationsspektren $g(v)$ und $j(v)$ ermitteln. Falls einer der beiden der Grenzwerte $G(0)$ oder $J(\infty)$ nicht existieren sollte, so müssen die entsprechenden Darstellungsforneln verwendet werden, die mit den Grenzwerten $G(\infty)$ bzw. $J(0)$ formuliert wurden.

$$\begin{aligned}
G^*(z) &:= G(0) - \int_0^\infty \frac{\bar{v}g(\bar{v})}{\bar{v}+z} d\bar{v} \\
J^*(z) &:= J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{\bar{v}+z} d\bar{v} \\
G^*(-v \pm i\gamma) &= G(0) - \int_0^\infty \frac{\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v}-v) \pm i\gamma} d\bar{v} \\
G^*(-v \pm i\gamma) &= G(0) - \int_0^\infty \frac{(\bar{v}-v)\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v}-v)^2 + \gamma^2} d\bar{v} \pm i \int_0^\infty \frac{\gamma\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v}-v)^2 + \gamma^2} d\bar{v} \\
\lim_{\gamma \rightarrow 0} G^*(-v \pm i\gamma) &= G(0) - \int_0^\infty \frac{\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v}-v)} d\bar{v} \pm \lim_{\gamma \rightarrow 0} i \int_0^\infty \frac{\gamma\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v}-v)^2 + \gamma^2} d\bar{v} \\
\lim_{\gamma \rightarrow 0} i \int_0^\infty \frac{\gamma\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v}-v)^2 + \gamma^2} d\bar{v} &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} i \int_{\frac{-v}{\gamma}}^\infty \frac{\gamma^2(v+\gamma u)g(v+\gamma u)}{\gamma^2 u^2 + \gamma^2} du \\
&= \lim_{\gamma \rightarrow 0} i \int_{\frac{-v}{\gamma}}^\infty \frac{(v+\gamma u)g(v+\gamma u)}{u^2 + 1} du \\
&= i v g(v) \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{1+u^2} = i\pi v g(v) \\
\lim_{\gamma \rightarrow 0} G^*(-v \pm i\gamma) &= G(0) - \int_0^\infty \frac{\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v}-v)} d\bar{v} \pm i\pi v g(v)
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} J^*(-v \pm i\gamma) = J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{(\bar{v}-v)} d\bar{v} \mp i\pi v j(v)$$

Ferner gilt für beliebige Argumente die Reziprozitätsbeziehung $G^*(z) = 1/J^*(z)$, woraus sich die beiden Relationen

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} G^*(-v + i\gamma) = \frac{1}{\lim_{\gamma \rightarrow 0} J^*(-v + i\gamma)}$$

und

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} G^*(-v - i\gamma) = \frac{1}{\lim_{\gamma \rightarrow 0} J^*(-v - i\gamma)}$$

ergeben. Diese werden im Folgenden ausgewertet, und die Beziehung zwischen den Spektren herzuleiten.

$$G(0) - \int_0^\infty \frac{\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} + i\pi v g(v) = \frac{1}{J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} - i\pi v j(v)}$$

und

$$G(0) - \int_0^\infty \frac{\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} - i\pi v g(v) = \frac{1}{J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} + i\pi v j(v)}$$

Subtraktion liefert :

$$2\pi i v g(v) = \frac{1}{J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} - i\pi v j(v)} - \frac{1}{J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} + i\pi v j(v)}$$

$$2\pi i v g(v) = \frac{2\pi i v j(v)}{\left\{ J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} \right\}^2 + \{\pi v j(v)\}^2}$$

$$g(v) = \frac{j(v)}{\left\{ J(0) + \int_0^\infty \frac{\bar{v}j(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} \right\}^2 + \pi^2 v^2 j^2(v)}$$

Diesen nichtlineare Funktional kann zur Ermittlung des Relaxationsspektrums bei gegebenem Kriechspektrum verwendet werden. Eine analoge Rechnung liefert für die Berechnung des Kriechspektrums aus dem Relaxationsspektrum:

$$j(v) = \frac{g(v)}{\left\{ G(0) - \int_0^\infty \frac{\bar{v}g(\bar{v})}{(\bar{v} - v)} d\bar{v} \right\}^2 + \pi^2 v^2 g^2(v)}$$

Damit sind nun zwei für die lineare Viskoelastizität fundamentale Beziehungen gefunden, mit denen man Relaxationsspektren aus Kriechspektren (und umgekehrt) berechnen kann.

Diese beiden Beziehungen setzen jeweils voraus, dass $G(0)$ und $J(0)$ existieren. Falls einer der beiden Grenzwerte nicht existiert, so müssen entsprechende Relationen mit $J(\infty)$ oder $G(\infty)$ formuliert werden.

10 Viskoelastizität mit fraktionellen Ableitungen

10.1 Motivation

Bekannte Materialgleichungen sind das lineare Elastizitätsgesetz $\sigma = E\varepsilon$ und das Modell der linearen Viskosität $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$. Allgemeiner lassen sich beide Gleichungen zu

$$\sigma = E\tau^n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \quad n = \begin{cases} 0 : \text{Elastizität} \\ 1 : \text{Viskosität} \end{cases}$$

zusammenfassen, wobei die Konstante $\tau = 1s$ aus Dimensionsgründen eingeführt wurde. Im Weiteren wird die Frage beantwortet, ob es gelingt, eine Verallgemeinerung der Zeitableitung auf reelle Ordnungen zu formulieren und diese zur Formulierung von Materialgleichungen zu benutzen. Es zeigt sich, dass diese Verallgemeinerung möglich ist und dass die sich ergebenden Stoffgleichungen sehr interessante Eigenschaften besitzen. Sie interpolieren zwischen einem linear elastischen Festkörper und einer linear viskosen Flüssigkeit.

10.2 Das Konzept der fraktionellen Integration und Differentiation

Definition einer kausalen Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } 0 < t < \infty \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Kausale Funktionen sind solche, die für negative Zeiten identisch Null sind. Man kann sich auf den Standpunkt stellen, dass nur solche Funktionen in der Technik vorkommen.

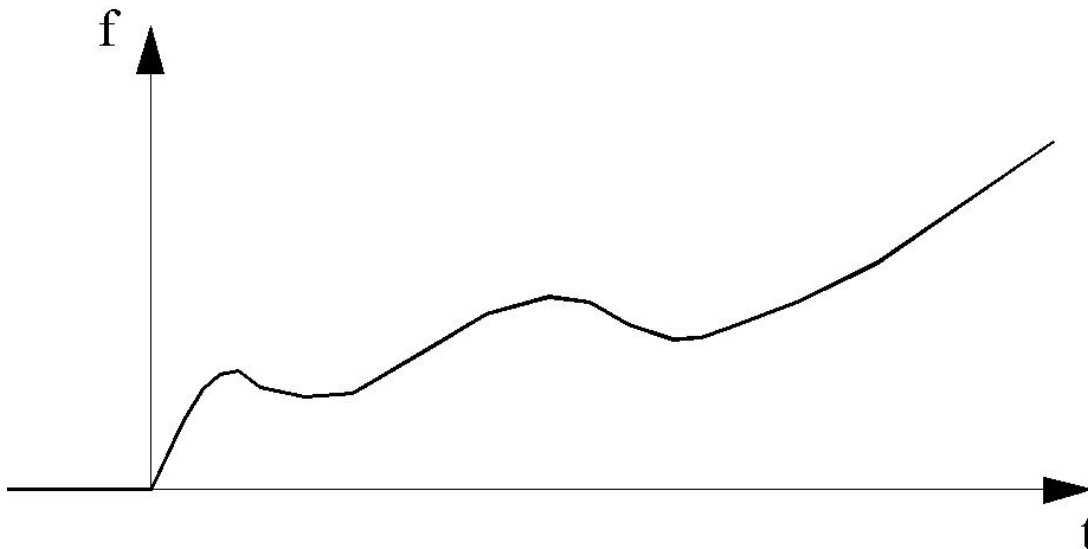


Abbildung 10-1 kausale Funktion

Definition einer Funktionenfolge:

$$F_1(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad F_{n+1}(t) = \int_0^t F_n(s) ds$$

Die Funktion $F_n(t)$ ist damit das n-fache Integral von $f(t)$. Im Folgenden geht es nun darum eine einfache Relation herzuleiten, mit der das n-fache Integral von $f(t)$ auf eine einfache Integration zurückgespielt werden kann:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \int_0^t \int_0^\tau f(s) ds d\tau = \int_0^t 1 \left(\int_0^\tau f(s) ds \right) d\tau \\ &= \left[\tau \int_0^\tau f(s) ds \right]_0^t - \int_0^t \tau f(\tau) d\tau \\ &= t \int_0^t f(s) ds - \int_0^t \tau f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (t-s) f(s) ds \\ F_3(t) &= \int_0^t \int_0^\tau (\tau-s) f(s) ds d\tau = \int_0^t 1 \left(\int_0^\tau (\tau-s) f(s) ds \right) d\tau \\ &= \left[\tau \int_0^\tau (\tau-s) f(s) ds \right]_0^t - \int_0^t \tau \left(\int_0^\tau f(s) ds \right) d\tau \\ &= t \int_0^t (t-s) f(s) ds - \left[\frac{\tau^2}{2} \int_0^\tau f(s) ds \right]_0^t + \int_0^t \frac{\tau^2}{2} f(\tau) d\tau \\ &= t \int_0^t (t-s) f(s) ds - \int_0^t \frac{t^2}{2} f(s) ds + \int_0^t \frac{s^2}{2} f(s) ds \\ &= \int_0^t \left\{ t^2 - ts - \frac{t^2}{2} + \frac{s^2}{2} \right\} f(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 f(s) ds \\ &= \frac{1}{2!} \int_0^t (t-s)^2 f(s) ds \end{aligned}$$

Allgemein gilt (ohne Beweis):

$$\underline{\underline{F_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds}}$$

Mit dieser Formel kann also das n-fache Integral über die kausale Funktion $f(t)$ durch ein einfaches Integral ausgedrückt werden. Die zu integrierende Funktion ist lediglich mit einer Kernfunktion zu multiplizieren. Diese Formel soll hier allerdings nicht bewiesen werden. Sie

dient zunächst dazu, das Konzept der fraktionellen Integration einzuführen. Hierzu muß eine äquivalente Formulierung dieser Formel gefunden werden, mit der es möglich ist, die natürliche Zahl n durch eine positive reelle Zahl zu ersetzen. Da die Fakultätsfunktion nur für positive natürliche Zahlen definiert ist, wird eine Verallgemeinerung benötigt.

Eulersche Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \quad (\text{Definitionsgleichung})$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{\infty} = 1$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \underbrace{\left[-e^{-t} t^x \right]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} x dt \\ &= x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \text{ Funktionalgleichung der } \Gamma\text{-Funktion}$$

Sei die Variable x in der Funktionalgleichung nun eine beliebige natürliche Zahl, dann gilt:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(2) &= 1 * \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2 * \Gamma(2) = 2 * 1 \\ \Gamma(4) &= 3 * \Gamma(3) = 3 * 2 * 1 \\ \Gamma(5) &= 4 * \Gamma(4) = 4 * 3 * 2 * 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\Gamma(n) = (n-1)!}}$$

Die Eulersche Gammafunktion ist also die Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion auf reelle Argumente. Damit kann der Ausdruck

$$F_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds$$

umgeformt werden:

$$F_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese Darstellungsformel für das n -fache Integral über $f(t)$ kann auf reelle Indizes $\beta > 0 \in \mathbb{R}$ verallgemeinert werden. Man erhält damit das fraktionelle Integral der Ordnung β :

$$F_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds$$

Da die Gammafunktion $\Gamma(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist und das Integral für $\beta \leq 0$ stark singular wird, kann es nicht ohne weiteres im Sinne einer fraktionellen Ableitung verallgemeinert werden. Daher wird folgende Umformung gemacht:

$$\begin{aligned} F_\beta(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds, \quad t-s=u, \quad du=-ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^0 u^{\beta-1} f(t-u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\beta-1} f(t-s) ds \end{aligned}$$

Sei $m \geq 0$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_\beta(t) &= \frac{d^m}{dt^m} F_{\beta+m}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+m)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t s^{\beta+m-1} f(t-s) ds \end{aligned}$$

Diese Relation kann ohne Probleme auf $\beta < 0$ verallgemeinert werden, indem man die natürliche Zahl $m \geq 0$ so wählt, dass $\beta+m > 0$ gilt.

Für die lineare Viskoelastizitätstheorie bzw. für die Definition des fraktionellen Dämpfungselements ist der Fall $-1 < \beta \leq 0$ besonders wichtig, so dass im Weiteren $m = +1$ gesetzt wird:

$$F_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^t s^\beta \dot{f}(t-s) ds + \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} t^\beta \underbrace{f(0)}_{=0}$$

Mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ für die zu differenzierende Funktion und der Umbenennung $\beta = -\alpha$ folgt:

$$\begin{aligned} F_{-\alpha}(t) &= \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^{-\alpha} \dot{f}(t-s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \dot{f}(s) ds, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

Dies ist die Beziehung zur fraktionellen Differentiation einer kausalen Funktion $f(t)$. Sie ist allerdings kein Differenzialquotient, sondern ein lineares Funktional. Diese Beziehung wird auch als Riemann-Liouville Definition der fraktionellen Ableitung bezeichnet. Für fraktionelle Ableitungen höherer Ordnung, z.B. für $-2 < \beta \leq -1$, ist $m = +2$ zu wählen, etc. Man muss allerdings voraussetzen, dass die Funktion $f(t)$ entsprechend häufig stetig differenzierbar ist.

10.3 Das fraktionelle Dämpfungselement

Nach Definition des Begriffes der fraktionellen Ableitung, kann das fraktionelle Dämpfungselement definiert werden:

$$\sigma = E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} \quad E > 0, \quad \tau = 1s, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma(t) = \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \dot{\varepsilon}(s) ds$$

Die Relaxationsfunktion ist bei diesem Element eine Potenzfunktion, die an der Stelle $t = 0$ eine schwache Singularität aufweist:

$$\underline{\underline{G(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha, \quad G(\infty) = 0}}$$

Für große Zeiten klingt diese Funktion asymptotisch auf Null ab. Allerdings ist das Abklingverhalten erheblich langsamer als bei Exponentialfunktionen.

Der komplexe Modul des fraktionellen Dämpfers:

Den komplexen Modul G^* gewinnt man, indem man in die allgemeine Darstellungsformel des Moduls die Relaxationsfunktion des fraktionellen Dämpfers einsetzt:

$$G^*(\omega) = G(\infty) + i\omega \int_0^\infty \{G(s) - G(\infty)\} e^{-i\omega s} ds$$

$$G^*(\omega) = i\omega \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-i\omega s} ds$$

$$G^*(\omega) = \frac{i\omega E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \int_0^\infty s^{-\alpha} \cos \omega s ds - i \int_0^\infty s^{-\alpha} \sin \omega s ds \right\}$$

Durch Anwendung der Formeln (siehe z.B. Bronstein, Semendjajew) für die beiden Integrale

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin bx dx = \frac{\pi b^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}, \quad 0 < \alpha < 2$$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \cos bx dx = \frac{\pi b^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

findet man das folgende Zwischenergebnis:

$$\Rightarrow G^*(\omega) = \frac{i\omega E\tau^\alpha \pi \omega^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)} - i \frac{1}{\sin(\alpha\pi/2)} \right\}$$

Dieses lässt sich in einigen Rechenschritten in die gewünschte Form bringen.

$$\text{Formelsammlung: } \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

$$\Rightarrow G^*(\omega) = \frac{i(\omega\tau)^\alpha E \sin(\pi\alpha)}{2} \left\{ \frac{\sin(\alpha\pi/2) - i \cos(\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi/2)} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G^*(\omega) &= E(\omega\tau)^\alpha \{ \cos\alpha(\alpha\pi/2) + i \sin(\alpha\pi/2) \} \\ &= E(\omega\tau)^\alpha e^{i\alpha\pi/2} = E(\omega\tau)^\alpha (e^{i\alpha\pi/2})^\alpha \\ &= E(\omega\tau)^\alpha i^\alpha = E(i\omega\tau)^\alpha \end{aligned}$$

Der komplexe Modul des fraktionellen Dämpfers ist also eine Potenzfunktion der Frequenz:

$$\underline{\underline{G^*(\omega) = E(i\omega\tau)^\alpha}}$$

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G'(\omega) = E(\omega\tau)^\alpha \cos(\alpha\pi/2)}}$$

$$\underline{\underline{G''(\omega) = E(\omega\tau)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}}$$

In einer doppeltlogarithmischen Auftragung sind die dynamischen Moduli $G'(\omega)$ und $G''(\omega)$ also zwei parallele Geraden.

$$\text{Grenzfälle: } \alpha = 0 \Rightarrow G^* = E \Leftrightarrow G' = E \text{ und } G'' = 0$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow G^* = i\omega\tau E \Leftrightarrow G' = 0 \text{ und } G'' = \omega\tau E$$

$$\text{Für } \alpha = \frac{1}{2} \text{ folgt } G'(\omega) = G''(\omega)$$

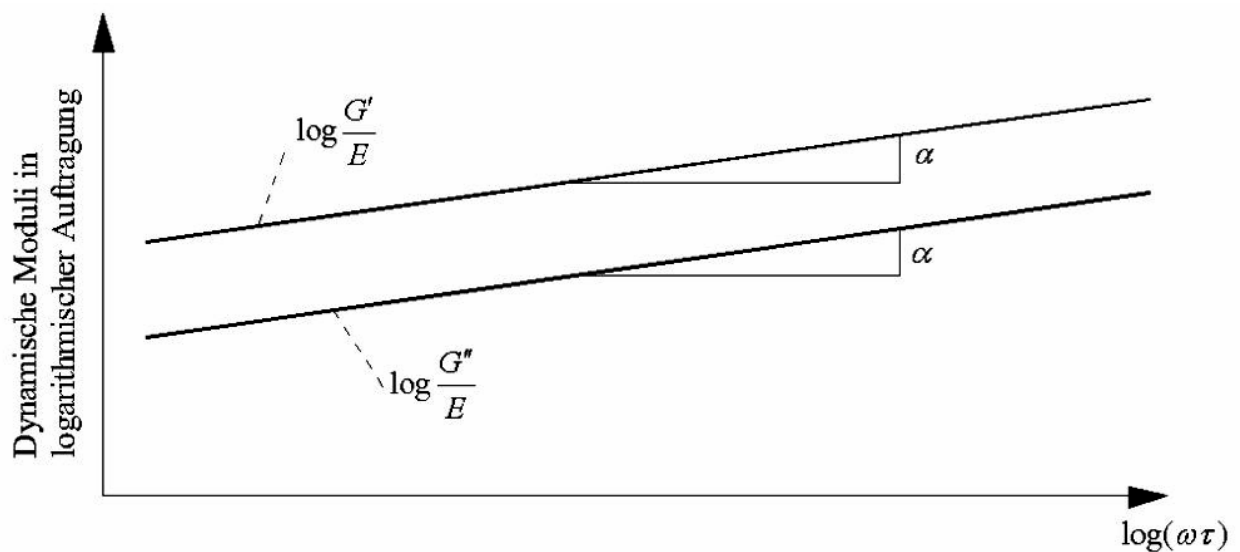


Abbildung 10-2 Dynamische Moduli des fraktionellen Dämpfers

Die im Zeitbereich geltende Materialbeziehung der Form:

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha}$$

geht also im Frequenzbereich in die folgende Form über:

$$\hat{\sigma}(\omega) = E(i\omega\tau)^\alpha \hat{\varepsilon}(\omega)$$

Die komplexe Nachgiebigkeit des fraktionellen Dämpfers

$$\begin{aligned} J^*(\omega)G^*(\omega) &= 1 \Rightarrow J^*(\omega) = \frac{1}{E(i\omega\tau)^\alpha} \\ J^*(\omega) &= \frac{1}{E(\omega\tau)^\alpha} i^{-\alpha} = \frac{1}{E(\omega\tau)^\alpha} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{-\alpha} = \frac{1}{E(\omega\tau)^\alpha} e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{E(\omega\tau)^\alpha} (\cos(\alpha\pi/2) - i\sin(\alpha\pi/2)) = J'(\omega) - iJ''(\omega) \\ \Rightarrow J'(\omega) &= \frac{1}{E} (\omega\tau)^{-\alpha} \cos(\alpha\pi/2) \\ J''(\omega) &= \frac{1}{E} (\omega\tau)^{-\alpha} \sin(\alpha\pi/2) \end{aligned}$$

Die dynamischen Nachgiebigkeiten $J'(\omega)$ und $J''(\omega)$ sind in einer doppeltlogarithmischen Auftragung also zwei parallele fallende Geraden. Für den Spezialfall $\alpha = 0.5$ sind die beiden dynamischen Moduli und die beiden Nachgiebigkeiten jeweils identisch. Von daher kann man sagen, dass ein fraktionelles Dämpfungselement zwischen einem linear elastischen Festkörper und einer linear viskosen Flüssigkeit interpoliert.

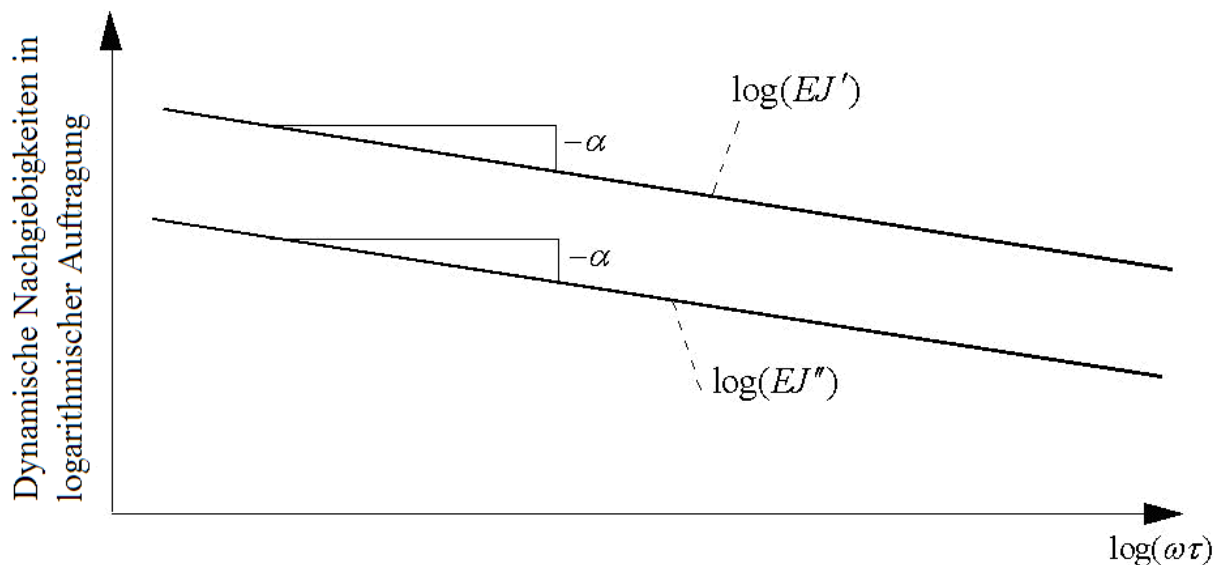


Abbildung 10-3 Dyn. Nachgiebigkeit des fraktionellen Dämpfers

Ermittlung der Kriechfunktion des fraktionellen Dämpfers

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \dot{\varepsilon}(s) ds \\ \Leftrightarrow \frac{\sigma(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} &= \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^u \frac{1}{(t-u)^{1-\alpha} (u-s)^\alpha} \dot{\varepsilon}(s) ds \\ \Leftrightarrow \int_0^t \frac{\sigma(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du &= \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^u \frac{1}{(t-u)^{1-\alpha} (u-s)^\alpha} \dot{\varepsilon}(s) ds du\end{aligned}$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge (siehe nächste Abbildung):

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\sigma(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du = \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_s^t \frac{1}{(t-u)^{1-\alpha} (u-s)^\alpha} \dot{\varepsilon}(s) du ds$$

Substitution: $x = \frac{t-u}{t-s} \Rightarrow dx = -\frac{du}{t-s}, \quad t-u = x(t-s)$
 $u-s = (1-x)(t-s)$

$$\frac{du}{(t-u)^{1-\alpha} (u-s)^\alpha} = \frac{-\cancel{(t-s)} dx}{x^{1-\alpha} \cancel{(t-s)}^{1-\alpha} (1-x)^\alpha \cancel{(t-s)}^\alpha} = -\frac{dx}{x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha}$$

Integrationsgrenzen: $u=s \Leftrightarrow x=1, \quad u=t \Leftrightarrow x=0$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\sigma(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du = \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \dot{\varepsilon}(s) \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha} ds$$

Bronstein: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(a+b+2)}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\underbrace{\alpha-1-\alpha+2}_{=1, \text{ wegen } \Gamma(1)=1})} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\sigma(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du = E\tau^\alpha \Gamma(\alpha) \left\{ \varepsilon(t) - \underbrace{\varepsilon(0)}_{=0} \right\}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du$$

$$= \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(\alpha)} \left\{ - \underbrace{\left[\frac{1}{\alpha} (t-u)^\alpha \sigma(u) \right]_0^t}_{=0, \text{ wegen } \sigma(0)=0} + \frac{1}{\alpha} \int_0^t (t-u)^\alpha \dot{\sigma}(u) du \right\}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha \dot{\sigma}(s) ds \quad *$$

Dieses ist die Kriechdarstellung der Materialgleichung des fraktionellen Dämpfungselements.

Die zugehörige Kriechfunktion $J(t)$ ist also eine monoton steigende Potenzfunktion.

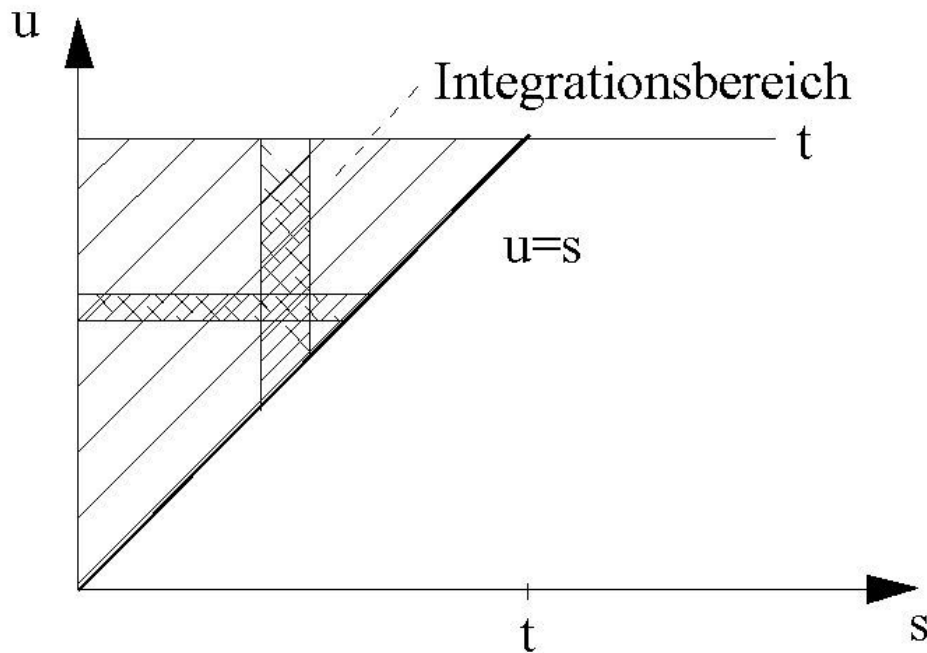


Abbildung 10-4 Integrationsbereich, Vertauschen der Integrationsreihenfolge

$$J(t) = \frac{1}{E\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \quad J(0) = 0$$

Wie man an dieser Kriechfunktion erkennt, ist das Kriechen des fraktionellen Dämpfers unbeschränkt. Er verhält sich wie eine viskoelastische Flüssigkeit.

Bemerkung: Integriert man Gleichung * partiell und nutzt die Anfangsbedingung $\sigma(0) = 0$ aus, so ergibt sich die äquivalente Darstellung, welche sich als fraktionelles Integral interpretieren lässt:

$$\Leftrightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \left((t-s)^\alpha \sigma(s) \Big|_0^t + \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds \right) = \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds$$

Das fraktionelle Dämpfungselement ist neben der linear elastischen Feder und dem linear viskosen Dämpfer ein weiteres rheologisches Element, das zur Formulierung von Materialmodellen verwendet werden kann. Seine Eigenschaft, dass die Relaxations- und Kriechfunktionen sowie die komplexen Moduli und Nachgiebigkeiten Potenzfunktionen sind, machen dieses Modell sehr brauchbar zur Darstellung von realen linear viskoelastischen Materialeigenschaften.

Relaxations- und Kriechspektrum eines fraktionellen Dämpfungselements

$$G(t) = \int_0^\infty g(v) e^{-vt} dv, \quad g(v): \text{Relaxationsspektrum}$$

Zur Berechnung des zum fraktionellen Dämpfer gehörigen Relaxationsspektrums $g(v)$ wird die inverse Stieltjes Transformation verwendet:

$$g(v) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{G^*(-v - i\gamma) - G(\infty)}{-v - i\gamma} - \frac{G^*(-v + i\gamma) - G(\infty)}{-v + i\gamma} \right\}$$

Um diese Formel auszuwerten, werden die komplexen Argumente jeweils mit der komplexen Exponentialfunktion dargestellt.

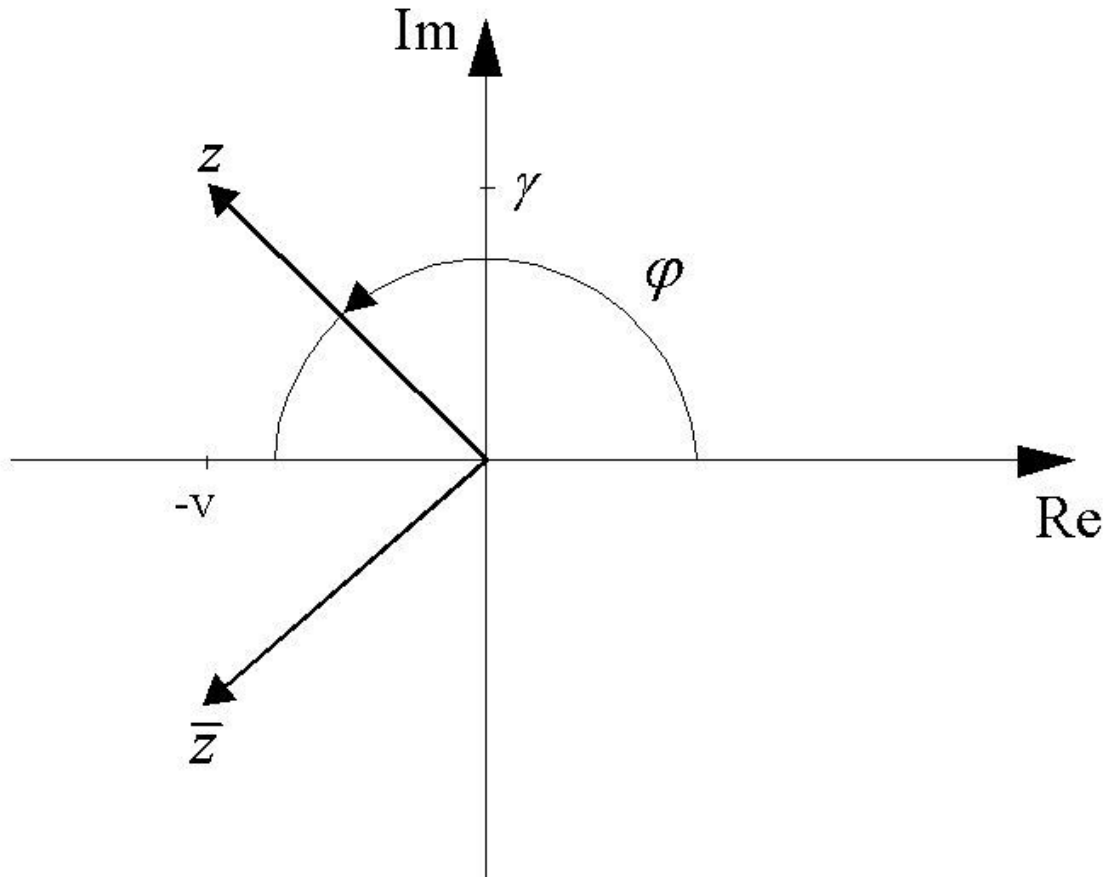


Abbildung 10-5 komplexe Zahlenebene und Polardarstellung

$$z = -v + i\gamma, \quad |z| = |\bar{z}| = \sqrt{v^2 + \gamma^2}$$

$$\bar{z} = -v - i\gamma$$

$$z = \sqrt{v^2 + \gamma^2} e^{i\varphi}, \quad \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\gamma}{v}\right)$$

$$\bar{z} = \sqrt{v^2 + \gamma^2} e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow 0} z = v e^{i\pi}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \bar{z} = v e^{-i\pi}$$

Für den fraktionellen Dämpfer gilt $G(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^\alpha \Rightarrow G(\infty) = 0$.

$$\begin{aligned}
G^* &= E(i\omega\tau)^\alpha, \quad \frac{G^*(z)}{z} = E\tau^\alpha z^{\alpha-1}, \quad \frac{G^*(\bar{z})}{\bar{z}} = E\tau^\alpha \bar{z}^{\alpha-1} \\
\Rightarrow g(v) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{G^*(\bar{z})}{\bar{z}} - \frac{G^*(z)}{z} \right\} \\
&= \frac{E\tau^\alpha}{2\pi i} \left\{ (ve^{-i\pi})^{\alpha-1} - (ve^{i\pi})^{\alpha-1} \right\} \\
&= \frac{E\tau^\alpha v^{\alpha-1}}{2\pi i} \underbrace{\left\{ e^{-i\pi(\alpha-1)} - e^{i\pi(\alpha-1)} \right\}}_{2i\sin((1-\alpha)\pi)} \\
\Rightarrow g(v) &= \frac{E\tau^\alpha v^{\alpha-1}}{\pi} \sin((1-\alpha)\pi)
\end{aligned}$$

Mit der Eigenschaft $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$ der Eulerschen Gammafunktion erhält man schließlich den Ausdruck

$$g(v) = \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)v^{1-\alpha}}$$

für das Relaxationsspektrum eines fraktionellen Dämpfungselements. Damit wurde also gezeigt, dass die Relaxationsfunktion $G(t)$ eines fraktionellen Dämpfungselements durch ein kontinuierliches Spektrum von Exponentialfunktionen darstellbar ist.

$$\frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{t} \right)^\alpha = \int_0^\infty \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)v^{1-\alpha}} e^{-vt} dv \quad *$$

Analog zu diesem Vorgehen lässt sich auch das zu dem fraktionellen Dämpfer gehörige Kriechspektrum ermitteln. Ein etwas kürzerer Weg, der auch zum Ziel führt, ist der folgend beschriebene:

$$\begin{aligned}
J(t) &= \int_0^\infty j(v) \{1 - e^{-vt}\} dv \\
\Rightarrow \dot{J}(t) &= \int_0^\infty v j(v) e^{-vt} dv \\
\text{Aus } J(t) &= \frac{1}{E\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \text{ folgt } \dot{J}(t) = \frac{\alpha}{E\tau\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Aus * ergibt sich:

$$\left(\frac{\tau}{t} \right)^\alpha = \int_0^\infty \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)v^{1-\alpha}} e^{-vt} dv$$

Ersetzt man in dieser Beziehung nun den Parameter α durch $1-\alpha$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\alpha} &= \int_0^\infty \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) v^\alpha} e^{-vt} dv \\
\Rightarrow \underbrace{\frac{\alpha}{E\tau\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\alpha}}_{=j(t)} &= \int_0^\infty \underbrace{\frac{\alpha\tau^{1-\alpha}}{E\tau\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha) v^\alpha}}_{vj(v)} e^{-vt} dv \\
\Rightarrow j(v) &= \frac{1}{E\tau^\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) v^{1+\alpha}} \\
\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{E\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha}} &= \underline{\underline{\int_0^\infty \frac{1}{E\tau^\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) v^{1+\alpha}} \{1 - e^{-vt}\} dv}}
\end{aligned}$$

Die Kriechfunktion des fraktionellen Dämpfers ist also ebenso durch ein kontinuierliches Spektrum darstellbar.

Damit ist gezeigt, dass ein fraktioneller Dämpfer sowohl durch eine kontinuierliche Verteilung von Maxwell-Elementen als auch durch eine kontinuierliche Verteilung von Kelvin-Elementen darstellbar ist. Mit dieser Argumentation ist seine thermomechanische Konsistenz sichergestellt. Sie ist aber auch explizit nachweisbar, was hier allerdings nicht durchgeführt wird.

11 Höherwertige Modelle der fraktionellen Viskoelastizität

Das fraktionelle Dämpfungselement ist gut dazu geeignet, um Relaxations-, Kriech- und dynamische Eigenschaften von zahlreichen Polymeren abzubilden. In vielen Fällen kann dieses Verhalten durch Potenzfunktionen modelliert werden. Falls dies nicht ausreicht, so lassen sich höherwertige Stoffgesetze der fraktionellen Viskoelastizität formulieren, indem man den fraktionellen Dämpfer als neues bzw. weiteres rheologisches Element benutzt. Hierzu soll nur ein einführendes Beispiel erläutert werden, welches in der Literatur auch als fraktionelle Verallgemeinerung des Dreiparameter-Modells bezeichnet wird.

Bemerkung: Genauere Betrachtungen zeigen, dass die auf diese Weise entstehenden Materialmodelle thermomechanisch konsistent sind. Eine formale Verallgemeinerung der Differentialgleichung des Dreiparameter-Modells aus Kapitel 4

$$\dot{\sigma} + \frac{c}{\eta} \sigma = (E + c) \dot{\varepsilon} + \frac{Ec}{\eta} \varepsilon$$

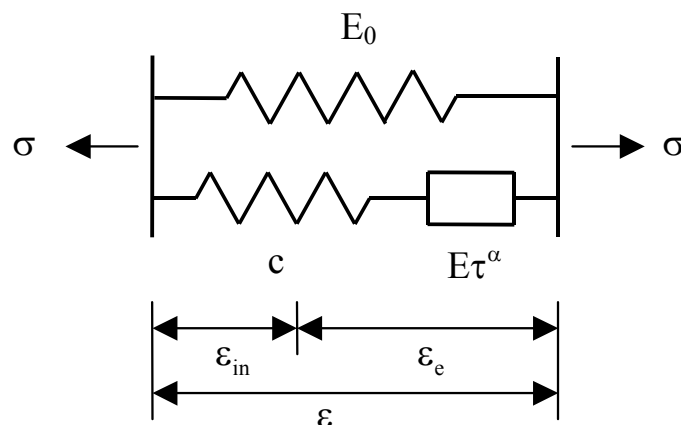
auf die Form

$$\frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} + \frac{c}{\eta} \sigma = (E + c) \frac{d^\beta \varepsilon}{dt^\beta} + \frac{Ec}{\eta} \varepsilon$$

führt dagegen auf ein thermomechanisch inkonsistentes Materialmodell. Man kann nachweisen, dass diese Verallgemeinerung nur für den Fall $\alpha = \beta$ thermomechanisch konsistent ist.

11.1 Das fraktionelle Dreiparameter-Modell

Im Folgenden wird eine thermomechanisch konsistente Verallgemeinerung des Dreiparameter-Modells formuliert: Der linear viskose Dämpfer wird dabei durch einen fraktionellen Dämpfer ersetzt.



Die Materialgleichungen dieses Modells lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}\sigma &= E_0 \varepsilon + \sigma_{ov} & \Leftrightarrow & \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = E_0 \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha \sigma_{ov}}{dt^\alpha} \\ \sigma_{ov} &= c [\varepsilon - \varepsilon_{in}] & \Leftrightarrow & \frac{d^\alpha \sigma_{ov}}{dt^\alpha} = c \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} - c \frac{d^\alpha \varepsilon_{in}}{dt^\alpha} \\ \sigma_{ov} &= E \tau^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon_{in}}{dt^\alpha} & \Leftrightarrow & \frac{d^\alpha \varepsilon_{in}}{dt^\alpha} = \frac{1}{E \tau^\alpha} \sigma_{ov}\end{aligned}$$

$$\frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = (E_0 + c) \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} - \frac{c}{E \tau^\alpha} (\sigma - E_0 \varepsilon)$$

$$\boxed{\frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} + \frac{c}{E \tau^\alpha} \sigma = (E_0 + c) \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} + \frac{c E_0}{E \tau^\alpha} \varepsilon}$$

Dies ist die fraktionelle Differentialgleichung des verallgemeinerten Dreiparameter-Modells. Streng genommen ist es eine Integralgleichung, da die fraktionelle Ableitung ein lineares Funktional ist. Dieses Modell beinhaltet vier Parameter E_0, c, E, α ($\tau = 1s$ ist kein Materialparameter) und wurde in der Literatur sehr häufig zur Darstellung des viskoelastischen Materialverhaltens von Polymeren (im Frequenzbereich üblicherweise) angewendet.

11.2 Ermittlung des dynamischen Moduls und der Nachgiebigkeit

Zur Berechnung des dynamischen Moduls wird $\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon} e^{i\omega t}$ und $\sigma(t) = \hat{\sigma} e^{i\omega t}$ eingesetzt.

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} &\text{ geht über in: } (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega) \\ (i\omega)^\alpha \hat{\sigma} + \frac{c}{E \tau^\alpha} \hat{\sigma} &= (E_0 + c) (i\omega)^\alpha \hat{\varepsilon} + \frac{c E_0}{E \tau^\alpha} \hat{\varepsilon} \\ \hat{\sigma}(\omega) \left\{ \frac{c}{E} + (i\omega \tau)^\alpha \right\} &= \hat{\varepsilon}(\omega) \left\{ (E_0 + c) (i\omega \tau)^\alpha + \frac{c E_0}{E} \right\} \\ \Rightarrow G^*(\omega) = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} &= \frac{(E_0 + c) (i\omega \tau)^\alpha + \frac{c E_0}{E}}{\frac{c}{E} + (i\omega \tau)^\alpha} \\ \Rightarrow J^*(\omega) = \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}} &= \frac{\frac{c}{E} + (i\omega \tau)^\alpha}{(E_0 + c) (i\omega \tau)^\alpha + \frac{c E_0}{E}}\end{aligned}$$

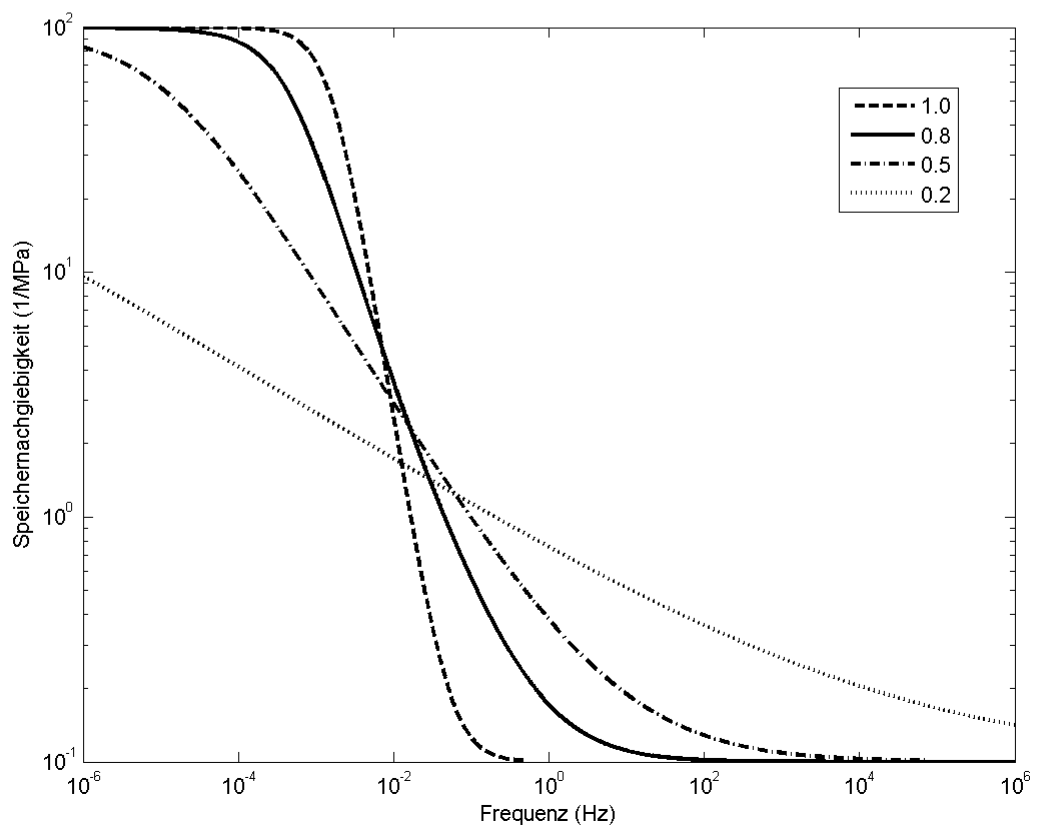
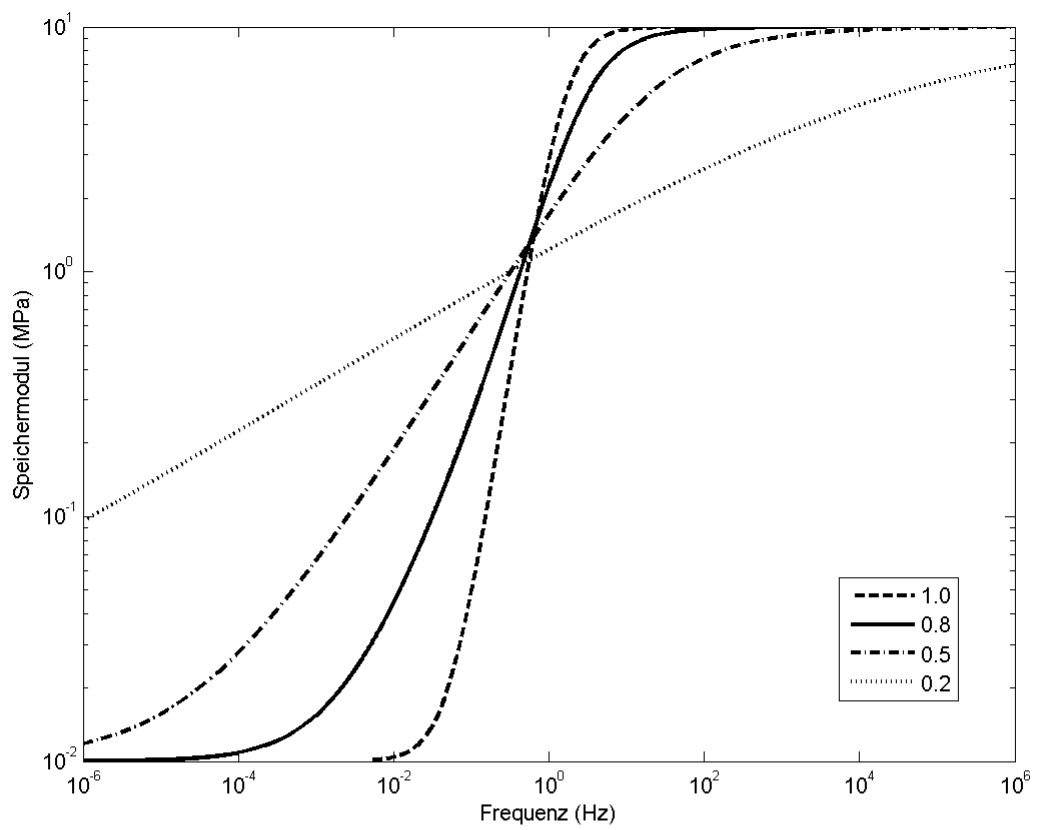
Die dynamischen Moduli und Nachgiebigkeiten sind sehr einfach in geschlossener Form berechenbar und können ziemlich leicht an entsprechende Versuchsdaten angepasst werden. Für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ sind die komplexen Moduli und Nachgiebigkeiten durch die Formeln

$$G^*(\infty) = E_0 + c \quad , \quad G^*(0) = E_0$$

$$J^*(\infty) = \frac{1}{E_0 + c} \quad , \quad J^*(0) = \frac{1}{E_0}$$

gegeben. Diese Zusammenhänge können an dem rheologischen Modell natürlich sofort ablesen werden.

Die folgenden vier Abbildungen stellen das frequenzabhängige dynamische Verhalten dieses Modells für verschiedene Werte des Parameters α dar. Man erkennt deutlich, dass sich die Frequenzabhängigkeit insbesondere für sehr kleine Werte des Parameters α über viele Zehnerpotenzen erstreckt. Für den Spezialfall $\alpha = 1$ ergibt sich die Frequenzabhängigkeit des klassischen Dreiparameter-Modells aus Kapitel 4.4.



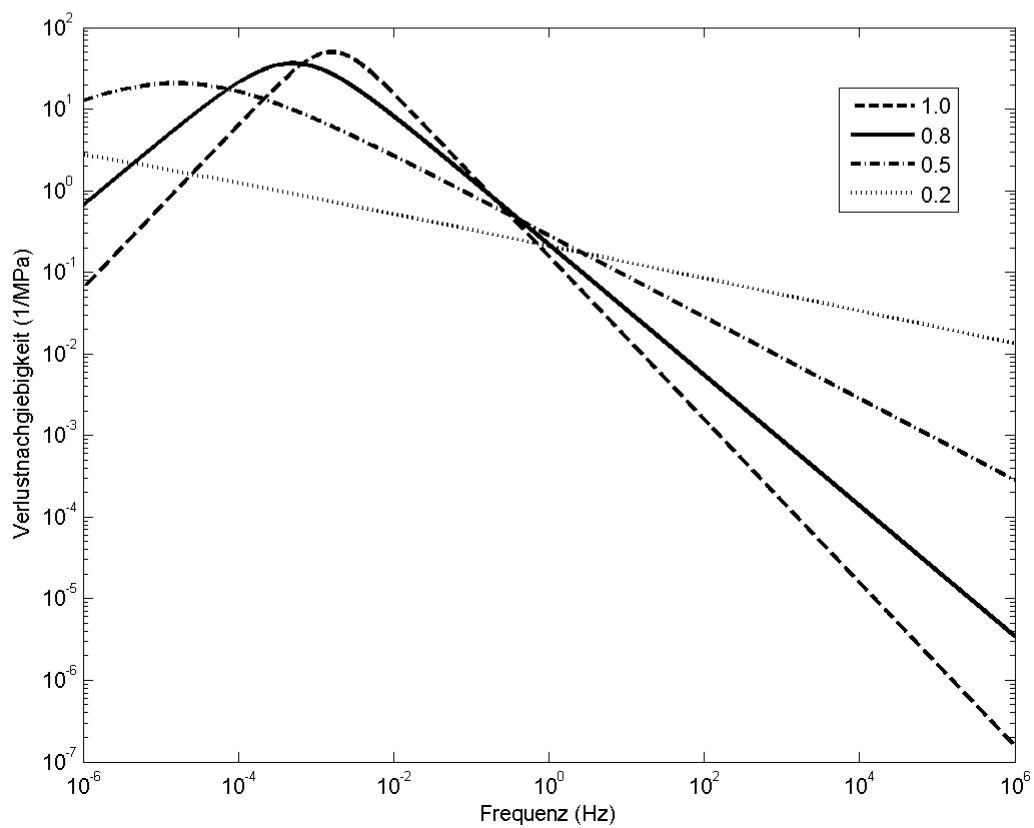
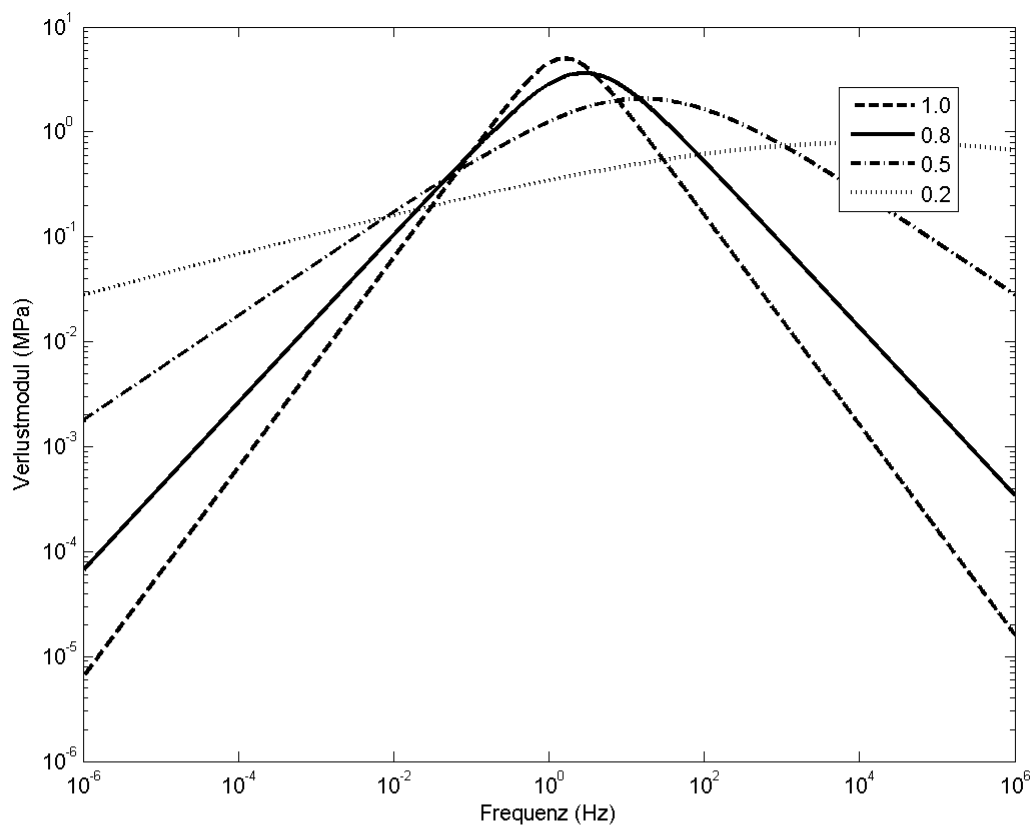


Abbildung 11-1 G', G'', J', J'' Modell mit fraktionellem Element

11.3 Relaxationsspektrum des fraktionellen Dreiparameter-Modells

Zur Ermittlung des Relaxationsspektrums aus dem komplexen dynamischen Modul wird die inverse Stieltjes Transformation zugrunde gelegt. Ihre Anwendung verlangt einen analytischen Ausdruck für den komplexen Modul:

$$G^*(\omega) = E_0 + \frac{c(i\omega\tau)^\alpha}{c/E + (i\omega\tau)^\alpha} \text{ bzw. allgemeiner}$$

$$G^*(z) = E_0 + \frac{c(z\tau)^\alpha}{c/E + (z\tau)^\alpha} \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}$$

Dabei ist $E_0 = G(\infty)$ der Gleichgewichtselastizitätsmodul. Für das Relaxationsspektrum gilt im Sinne der inversen Stieltjes Transformation:

$$g(v) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{G^*(-v - i\gamma) - G(\infty)}{-v - i\gamma} - \frac{G^*(-v + i\gamma) - G(\infty)}{-v + i\gamma} \right\}$$

mit dem Grenzwert $\lim_{\gamma \rightarrow 0} (-v \pm i\gamma) = v e^{\pm i\pi}$ ergibt sich:

$$g(v) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{c(v\tau)^\alpha e^{-i\alpha\pi}}{\frac{c}{E} + (v\tau)^\alpha e^{-i\alpha\pi}} \left(\frac{1}{v e^{-i\pi}} \right) - \frac{c(v\tau)^\alpha e^{i\alpha\pi}}{\frac{c}{E} + (v\tau)^\alpha e^{i\alpha\pi}} \left(\frac{1}{v e^{i\pi}} \right) \right\}$$

$$g(v) = \frac{\tau}{2\pi i} \left\{ \frac{c(v\tau)^{\alpha-1} e^{-i\alpha\pi} (-1)}{\frac{c}{E} + (v\tau)^\alpha e^{-i\alpha\pi}} - \frac{c(v\tau)^{\alpha-1} e^{i\alpha\pi} (-1)}{\frac{c}{E} + (v\tau)^\alpha e^{i\alpha\pi}} \right\}$$

$$g(v) = \frac{\tau}{2\pi i} \frac{c(v\tau)^{\alpha-1} \left\{ -e^{-i\alpha\pi} \left[\frac{c}{E} + (v\tau)^\alpha e^{i\alpha\pi} \right] + e^{i\alpha\pi} \left[\frac{c}{E} + (v\tau)^\alpha e^{-i\alpha\pi} \right] \right\}}{\left(\frac{c}{E} \right)^2 + (v\tau)^{2\alpha} + 2 \left(\frac{c}{E} \right) (v\tau)^\alpha \cos \alpha\pi}$$

$$g(v) = \frac{c\tau(v\tau)^{\alpha-1}}{2\pi i} \frac{\left\{ \frac{c}{E} 2i \sin \alpha\pi \right\}}{\left(\frac{c}{E} \right)^2 + (v\tau)^{2\alpha} + 2 \left(\frac{c}{E} \right) (v\tau)^\alpha \cos \alpha\pi}$$

$$g(v) = \frac{c}{\pi v} \frac{\frac{c}{E} (v\tau)^\alpha \sin \alpha\pi}{\left(\frac{c}{E} \right)^2 + (v\tau)^{2\alpha} + 2 \left(\frac{c}{E} \right) (v\tau)^\alpha \cos \alpha\pi}$$

Das Kriechspektrum dieses Modells lässt sich zum Beispiel durch die entsprechenden Gleichungen aus der komplexen dynamischen Kriechnachgiebigkeit ermitteln.

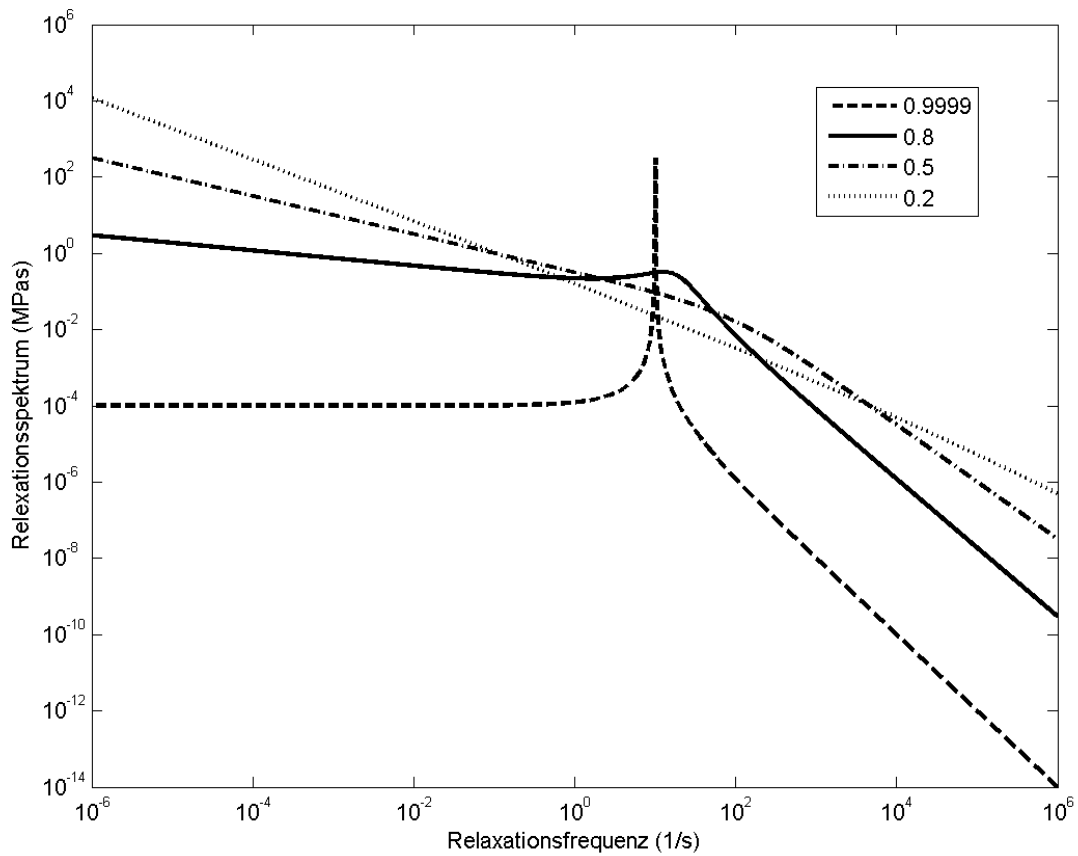


Abbildung 11-2 Relaxationsspektrum des fraktionellen Dämpfers

Die Relaxationsfunktion $G(t)$ dieses Modells ist daher auch durch Superposition von Exponentialfunktionen darstellbar.

$$G(t) = E_0 + c \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi v} \frac{(c/E)(v\tau)^\alpha \sin \alpha \pi}{(c/E)^2 + (v\tau)^{2\alpha} + 2(c/E)(v\tau)^\alpha \cos \alpha \pi} \right) e^{-vt} dv$$

Für die Spannungsantwort kann des fraktionellen Dreiparameter-Modell gilt somit die folgende Beziehung

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \int_0^t \left[c \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi v} \frac{(c/E)(v\tau)^\alpha \sin \alpha \pi}{(c/E)^2 + (v\tau)^{2\alpha} + 2(c/E)(v\tau)^\alpha \cos \alpha \pi} \right) e^{-v(t-s)} dv \right] \dot{\varepsilon}(s) ds,$$

welche auch mit der oben hergeleiteten Relaxationsfunktion $G(t)$ in der kompakten Form

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds,$$

geschrieben werden kann. Die Relaxationsfunktion hängt mit der so genannten Mittag-Leffler Funktion $E_\alpha(x)$ zusammen.

11.4 Reihendarstellung der Mittag Leffler Funktion

In der folgenden Betrachtung wird die Potenzreihendarstellung der Mittag Leffler-Funktion $E_\alpha(x)$ aus der Materialgleichung des fraktionellen Dreiparameter Modells bzw. aus seinem ratenabhängigen Anteil hergeleitet. Dies führt im Rahmen der hier eingesetzten Methode auf eine lineare Volterrasche Integralgleichung mit schwach singulärer Kernfunktion. Um diese Integralgleichung herzuleiten und die zugehörige Lösungsmethode anzuwenden, wird das folgende Modell betrachtet:

$$\begin{aligned}\sigma_{ov} &= c(\varepsilon - \varepsilon_{in}) \\ \sigma_{ov} &= E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon_{in}}{dt^\alpha} \Leftrightarrow \frac{d^\alpha \varepsilon_{in}}{dt^\alpha} = \frac{1}{E\tau^\alpha} \sigma_{ov}\end{aligned}$$

Auflösen dieser fraktionellen Differentialgleichung nach der inelastischen Dehnung in Analogie zu Kapitel 10.3 liefert:

$$\varepsilon_{in} = \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha \dot{\sigma}_{ov}(s) ds \Leftrightarrow \varepsilon_{in} = \frac{1}{E\tau^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma_{ov}(s) ds$$

Setzt man dieses Funktional in die Beziehung $\sigma_{ov} = c(\varepsilon - \varepsilon_{in})$ ein, so findet man die folgende lineare Volterrasche Integralgleichung zur Berechnung der Überspannung.

$$\underline{\underline{\sigma_{ov}(t) + \frac{c}{E\tau^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma_{ov}(s) ds = c\varepsilon(t) \quad *}}$$

Die Kernfunktion weist unter der Voraussetzung $0 < \alpha < 1$ eine schwache Singularität auf, so dass das Integral existiert (siehe hierzu z.B. Grabmüller).

Zur analytischen Lösung dieser Integralgleichung wird ihre Resolvente mit Hilfe der Neumannschen Reihe berechnet. Die Methode wird in der Fachliteratur zum Thema Integralgleichungen beschrieben. Hierzu wird zunächst von der allgemeinen Form solcher Integralgleichungen ausgegangen:

$$u(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-s)u(s)ds = v(t)$$

Die eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$u(t) = v(t) + \int_0^t R(t-s)v(s)ds$$

mit der Resolventen

$$R(t-s) = \sum_{j=1}^{\infty} (-\lambda)^j K_j(t-s)$$

und den Kernen

$$K_{j+1}(t-s) = \int_s^t K_j(\tau-s) K_1(t-\tau) d\tau.$$

Wendet man dieses Verfahren auf die Integralgleichung * an, so ergibt sich mit der Vereinbarung $\lambda = c/(E\tau^\alpha) = 1/z^\alpha$

$$K_1(t-s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

und

$$K_2(t-s) = \int_s^t K_1(\tau-s) K_1(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} \int_s^t (\tau-s)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau.$$

Setzt man nun im Sinne einer Variablensubstitution die Transformation

$$x = \frac{t-\tau}{t-s} \Rightarrow \begin{cases} (t-\tau) = x(t-s) \\ (\tau-s) = (1-x)(t-s) \\ d\tau = -(t-s)dx \end{cases}$$

ein, so ergibt sich zunächst mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$\begin{aligned} \int_s^t (\tau-s)^a (t-\tau)^b d\tau &= (t-s)^{a+b+1} \int_0^1 x^a (1-x)^b dx \\ &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} (t-s)^{a+b+1}. \end{aligned}$$

Damit folgt für $a = b = \alpha - 1$

$$K_2(t-s) = \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}.$$

Allgemein kann man nachweisen (hier allerdings ohne Beweis)

$$K_j(t-s) = \frac{(t-s)^{j\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha)},$$

so dass sich der folgende Ausdruck für die gesuchte Resolvente ergibt:

$$R(t-s) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j\alpha}} \frac{(t-s)^{j\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha)}$$

Für die Überspannung erhält man damit das Funktional

$$\sigma_{ov}(t) = c\varepsilon(t) + c \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{z^{j\alpha}} \frac{(t-s)^{j\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha)} \right) \varepsilon(s) ds,$$

welches nach partieller Integration in die vorläufige Form

$$\sigma_{ov}(t) = c\varepsilon(t) - \underbrace{\left(c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{j\alpha}} \frac{(t-s)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} \right) \varepsilon(s)}_{=0} \bigg|_0^t + c \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{j\alpha}} \frac{(t-s)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} \right) \dot{\varepsilon}(s) ds,$$

und Zusammenfassung der beiden verbleibenden Terme in die endgültige Form

$$\sigma_{ov}(t) = c \int_0^t \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j\alpha+1)} \left(\frac{t-s}{z} \right)^{j\alpha} \right) \dot{\varepsilon}(s) ds,$$

übergeht. Die so genannte Mittag-Leffler Funktion ist durch die Reihendarstellung

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(j\alpha+1)} (x)^j$$

gegeben, womit sich für die Überspannung die folgende funktionale Beziehung ergibt:

$$\sigma_{ov}(t) = c \int_0^t E_{\alpha} \left(- \left(\frac{t-s}{z} \right)^{\alpha} \right) \dot{\varepsilon}(s) ds = \int_0^t G(t-s) \dot{\varepsilon}(s) ds$$

Für den Spezialfall $\alpha = 1$ geht die Mittag-Leffler Funktion in die Exponentialfunktion über und damit das fraktionelle Maxwell Element in das klassische Maxwell Element. In der Literatur wird die Mittag-Leffler Funktion auch als fraktionelle Exponentialfunktion bezeichnet.

12 Approximation kontinuierlicher durch diskrete Spektren

Zum allgemeinen bzw. theoretischen Verständnis der linearen Viskoelastizität haben kontinuierliche Relaxations- und Retardationsspektren große Vorteile: Wenn beispielsweise bei einem Polymerwerkstoff die Relaxationszeiten sehr dicht beieinander liegen, ist es wesentlich angemessener mit einem kontinuierlichen Spektrum zu arbeiten als mit einem diskreten, welches sehr viele Terme und damit Materialparameter beinhaltet. Auf der anderen Seite besitzen kontinuierliche Spektren den Nachteil, dass sich die Materialmodelle nicht in Differentialgleichungen überführen lassen.

Im Folgenden wird daher eine allgemeine Methode entwickelt, die es erlaubt, ein kontinuierliches Relaxationsspektrum in einem bestimmten Zeit- oder Frequenzbereich durch ein diskretes Spektrum zu approximieren. Im Fall eines diskreten Spektrums lassen sich die Modelle in Differentialgleichungen überführen, was numerische Berechnungen deutlich vereinfacht.

12.1 Kumulatives Relaxationsspektrum

Au Gründen, welche die Approximierbarkeit eines kontinuierlichen Spektrums durch ein diskretes betreffen, wird der Begriff des kumulativen Spektrums eingeführt. Hierzu wird die spektrale Darstellung der Relaxationsfunktion partiell integriert.

$$G(t) = \int_0^{\infty} g(v) e^{-vt} dv = \underbrace{\left[h(v) e^{-vt} \right]_0^{\infty}}_{=0} + t \int_0^{\infty} h(v) e^{-vt} dv$$
$$h(v) = \int_0^v g(x) dx$$

Die monoton wachsende Funktion $h(v)$ ist das kumulative Spektrum. Damit kann die Relaxationsfunktion alternativ wie folgt dargestellt werden:

$$\Rightarrow G(t) = t \int_0^{\infty} h(v) e^{-vt} dv$$

Kumulatives Spektrum einer Maxwell-Kette

Das kumulative Spektrum der Maxwell-Kette, mit der das kontinuierliche Spektrum approximiert werden soll, wird durch Integration aus dem Relaxationsspektrum $g_M(v)$ ausgerechnet:

$$g_M(v) = \sum_{k=1}^n G_k \delta(v - v_k)$$

$$\Rightarrow h_M(v) = \int_0^v g_M(x) dx = \sum_{k=1}^n G_k \int_0^v \delta(x - v_k) dx$$

$$= \sum_{k=1}^n G_k \langle v - v_k \rangle$$

Dabei ist: $\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

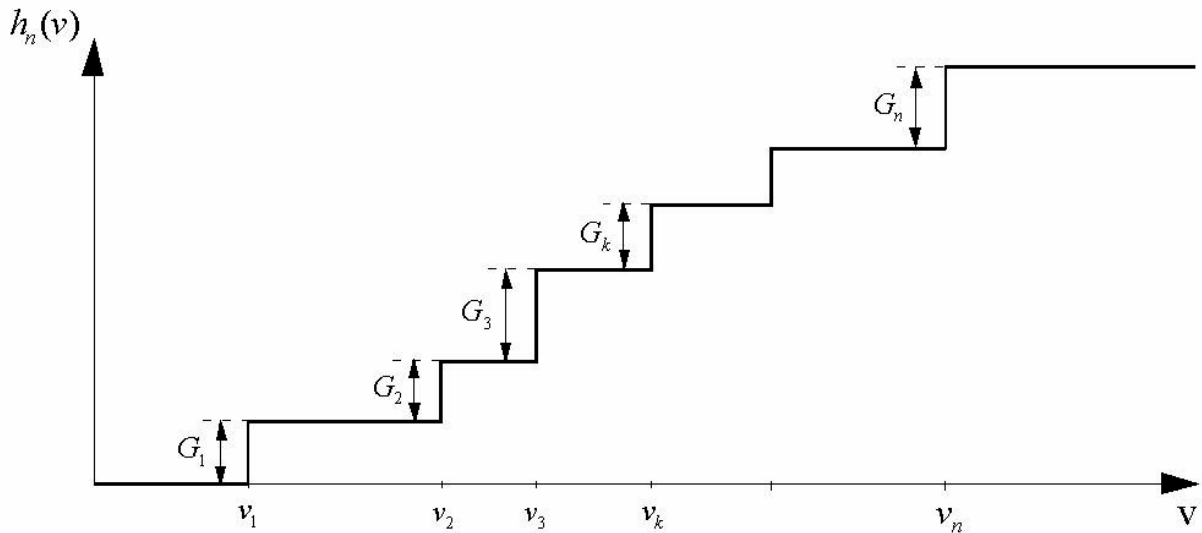
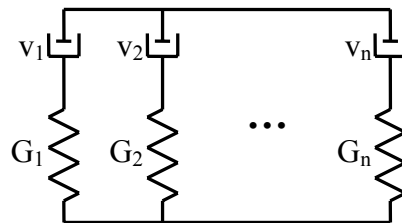


Abbildung 12-1 kumulatives Spektrum einer Maxwell Kette

Das kumulative Spektrum einer Maxwell-Kette ist also eine Treppenfunktion mit Sprungstellen an den diskreten Relaxationsfrequenzen v_k , die sich in Relaxationszeiten oder Viskositäten umrechnen lassen. Die Sprunghöhen haben die Werte G_k der Elastizitätskonstanten.



Die Relaxationsfunktion einer aus n Elementen bestehenden Maxwell-Kette lautet:

$$G_M(t) = \sum_{k=1}^n G_k e^{-v_k t}$$

12.2 Approximation mit Hilfe des kumulativen Spektrums

Im Folgenden geht es darum, ein diskretes Relaxationsspektrum $(G_1, G_2, \dots, G_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$ so zu bestimmen, dass das Relaxationsverhalten eines viskoelastischen Werkstoffes, der durch ein kontinuierliches Spektrum beschrieben wird, in einem beliebig vorgegebenen Zeitbereich

$t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ näherungsweise abgebildet wird. Da die diskreten Relaxationsfrequenzen ν_k bzw. Relaxationszeiten $\tau_k = 1/\nu_k$ dadurch die Bedeutung von Materialparametern verlieren, wird die Verteilung der Relaxationsfrequenzen vorgegeben. Hierzu wird eine lineare Verteilung auf einer logarithmischen Skala gewählt:

$$\nu_k = \nu_{\min} \left(\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} \right)^{\frac{k-1}{n-1}}$$

$\nu_1 = \nu_{\min}$: kleinste Relaxationsfrequenz der Maxwell-Kette

$\nu_n = \nu_{\max}$: größte Relaxationsfrequenz der Maxwell-Kette

$$\log \nu_k = \log \nu_{\min} + \frac{k-1}{n-1} \log \left(\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} \right) \quad *$$

Die Parameter $\nu_{\min}, \nu_{\max}$ und n sollen nun bestimmt werden, so dass die Maxwell-Kette die Relaxationsfunktion $G(t)$ des kontinuierlichen Spektrums möglichst gut approximiert.

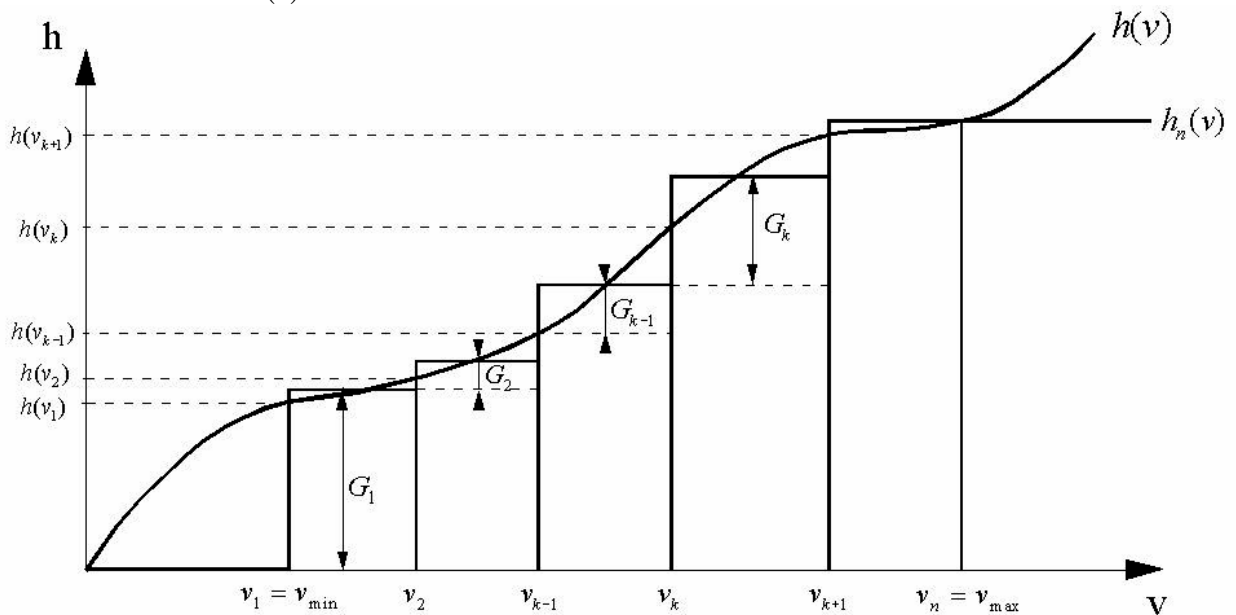


Abbildung 12-2 kumulatives Spektrum der Maxwell Kette und $h(v)$

Die Aufgabe der folgenden Betrachtung besteht darin, das gegebene kontinuierliche kumulative Spektrum $h(v)$ im Argumentbereich $\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}$ durch das kumulative Spektrum einer Maxwell-Kette $h_M(v)$, d.h. durch eine Treppenfunktion, möglichst gut zu approximieren. Hierzu werden die Niveaus der Treppenfunktion zwischen den diskreten Stützstellen wie folgt definiert und daraus dann die diskreten Moduli ausgerechnet. Die Moduli G_k entsprechen den lokalen Stufenhöhen der Treppenfunktion.

$$\begin{aligned}
0 &\leq v < v_1: & h_M(v) &= 0 \\
v_1 &\leq v < v_2: & h_M(v) &= G_1 = \frac{1}{2}(h(v_1) + h(v_2)) \\
v_{k-1} &\leq v < v_k: & h_M(v) &= \sum_{i=1}^{k-1} G_i = \frac{1}{2}(h(v_{k-1}) + h(v_k)) \\
v_k &\leq v < v_{k+1}: & h_M(v) &= \sum_{i=1}^k G_i = \frac{1}{2}(h(v_k) + h(v_{k+1})) \\
v_n &\leq v: & h_M(v) &= \sum_{i=1}^n G_i = \frac{1}{2}(h(v_n) + h(v_{n+1}))
\end{aligned}$$

Berechnung der elastischen Moduli

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{1}{2}(h(v_1) + h(v_2)) \\
G_k &= \frac{1}{2}(h(v_k) + h(v_{k+1}) - [h(v_{k-1}) + h(v_k)]) \\
\Rightarrow G_k &= \frac{1}{2}(h(v_{k+1}) - h(v_{k-1})) \quad \text{für } k > 1
\end{aligned}$$

Setzt man diese Moduli in die Relaxationsfunktion $G_M(t)$ der Maxwell-Kette ein und berücksichtigt man die vorgegebene Relaxationsfrequenzverteilung * , so kann der Fehler

$$\Phi(t) = |G(t) - G_M(t)|$$

zwischen der zu approximierenden Relaxationsfunktion $G(t)$ und der Relaxationsfunktion der Maxwell-Kette berechnet und durch Wahl der Parameter $v_{\min}, v_{\max}, n$ minimiert werden.

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= |G(t) - G_M(t)| = \left| t \int_0^\infty \{h(v) - h_M(v)\} e^{-vt} dv \right| \\
\Phi(t) &= \left| t \int_0^{v_{\min}} h(v) e^{-vt} dv + t \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \{h(v) - h_M(v)\} e^{-vt} dv + t \int_{v_{\max}}^\infty \{h(v) - h_M(v)\} e^{-vt} dv \right| \\
\Phi(t) &= |\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3| \leq |\Phi_1| + |\Phi_2| + |\Phi_3| \\
|\Phi_1| &= \left| t \int_0^{v_{\min}} h(v) e^{-vt} dv \right| \leq h(v_{\min}) \int_0^{v_{\min} t} e^{-s} ds \\
&= h(v_{\min}) [1 - e^{-v_{\min} t}] \leq h(v_{\min}) [1 - e^{-v_{\min} t_{\max}}]
\end{aligned}$$

Der erste Fehleranteil $|\Phi_1|$ wird für $v_{\min} t_{\max} \ll 1$ besonders klein. Daher ist die kleinste Relaxationsfrequenz $v_{\min}$ der zur Approximation verwendeten Maxwell-Kette so zu wählen, dass sie die Bedingung

$$v_{\min} \ll \frac{1}{t_{\max}}$$

erfüllt. Der dritte Fehleranteil kann analog behandelt werden:

$$\begin{aligned}
 |\Phi_3| &= \left| t \int_{v_{\max}}^{\infty} \{h(v) - h_M(v)\} e^{-vt} dv \right| \leq t \int_{v_{\max}}^{\infty} |h(v) - h_M(v)| e^{-vt} dv \\
 &\leq h(\infty) \int_{v_{\max}}^{\infty} t e^{-vt} dv = h(\infty) \int_{v_{\max} t}^{\infty} e^{-s} ds = h(\infty) e^{-v_{\max} t} \\
 &\leq h(\infty) e^{-v_{\max} t_{\min}}
 \end{aligned}$$

Dieser Fehleranteil wird besonders klein, wenn für die größte Relaxationsfrequenz die Bedingung

$$v_{\max} \gg \frac{1}{t_{\min}}$$

erfüllt ist. Für den letzten Fehleranteil findet man die folgende obere Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 |\Phi_2| &= \left| t \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \{h(v) - h_M(v)\} e^{-vt} dv \right| \leq t \int_{v_1}^{v_n} |h(v) - h_M(v)| dv \\
 &= t \sum_{k=1}^{n-1} \int_{v_k}^{v_{k+1}} |h(v) - h_M(v)| dv
 \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert für $v_k \leq v \leq v_{k+1}$ und damit für $|\phi_2|$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 |h(v) - h_M(v)| &\leq h(v_{k+1}) - h(v_k) = h'(v_k + \mu_k [v_{k+1} - v_k]) (v_{k+1} - v_k) \\
 \text{mit } 0 \leq \mu_k \leq 1, \quad M_k &:= \max_{0 \leq \mu_k \leq 1} h'(v_k + \mu_k [v_{k+1} - v_k]), \quad M := \max_{k=1, \dots, n} (M_k) \\
 \Rightarrow |\Phi_2| &\leq t M \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)^2
 \end{aligned}$$

Aus der verwendeten Relaxationsfrequenzverteilung folgt:

$$\begin{aligned}
 v_{k+1} - v_k &= v_{\min} \left\{ \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{k}{n-1}} - \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{k-1}{n-1}} \right\} \\
 v_{k+1} - v_k &= v_{\min} \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{k-1}{n-1}} \left\{ \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\eta = \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
v_{k+1} - v_k &= v_{\min} \eta^{k-1} (\eta - 1) \\
\Rightarrow |\Phi_2| &\leq t_{\max} M v_{\min}^2 (1 - \eta)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \eta^{2(k-1)} \leq t_{\max} M v_{\min}^2 (1 - \eta)^2 \sum_{k=1}^n (\eta^2)^k \\
&= v_{\min}^2 t_{\max} (1 - \eta)^2 M \frac{\eta^{2n} - 1}{\eta^2 - 1} \\
&= v_{\min}^2 t_{\max} (1 - \eta)^2 M \frac{\eta^{2n} - 1}{(\eta - 1)(\eta + 1)} \\
&= v_{\min}^2 t_{\max} (\eta - 1) M \frac{\eta^{2n} - 1}{(\eta + 1)} \\
\text{mit } \eta^{2n} &= \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} = \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{2}{1-\frac{1}{n}}} \leq \left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^4 \text{ für } n \geq 2 \\
\Rightarrow |\Phi_2| &= v_{\min}^2 t_{\max} M \left(\left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right) \frac{\left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^4 - 1}{\left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1}
\end{aligned}$$

Um den Fehleranteil $|\Phi_2|$ möglichst klein zu bekommen, muss die Bedingung

$$\left(\frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right)^{\frac{1}{n-1}} - 1 \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad n \gg 1 + \frac{\log(v_{\max}) - \log(v_{\min})}{\log 2}$$

gelten. Die Anzahl der zur Approximation verwendeten Maxwell-Elemente sollte also auch hinreichend hoch sein.

Beispiel: Approximation der Relaxationsfunktion eines fraktionellen Dämpfungselements

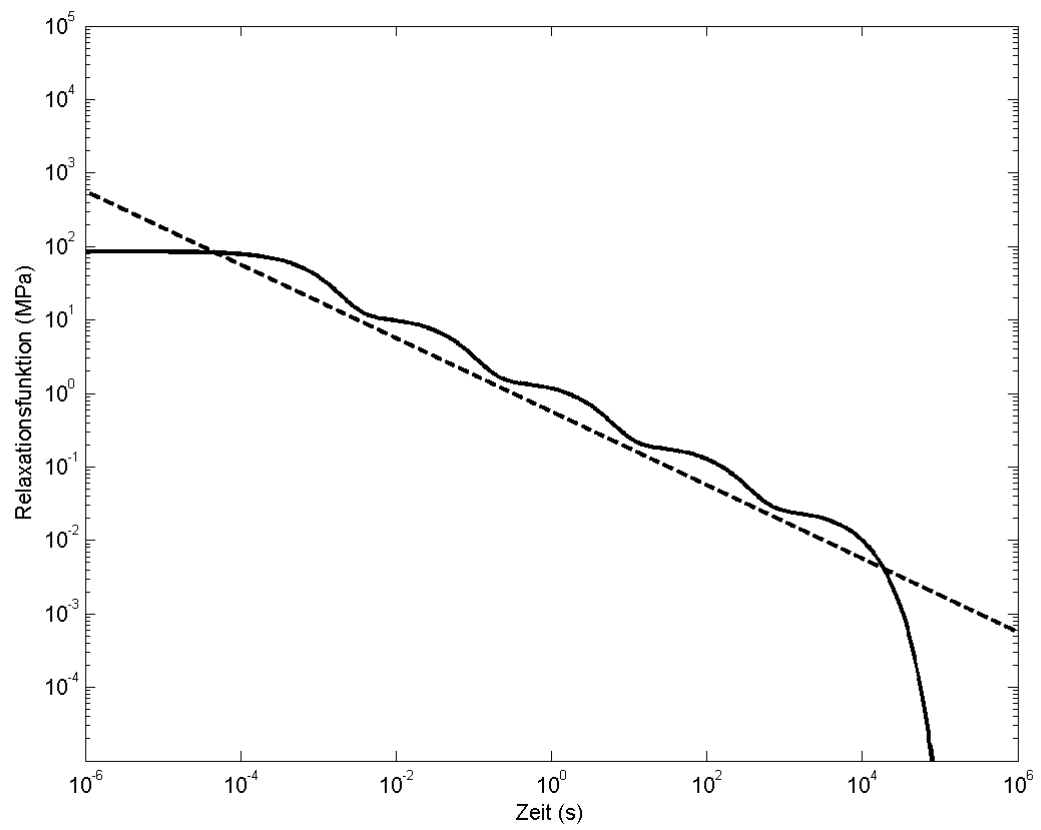
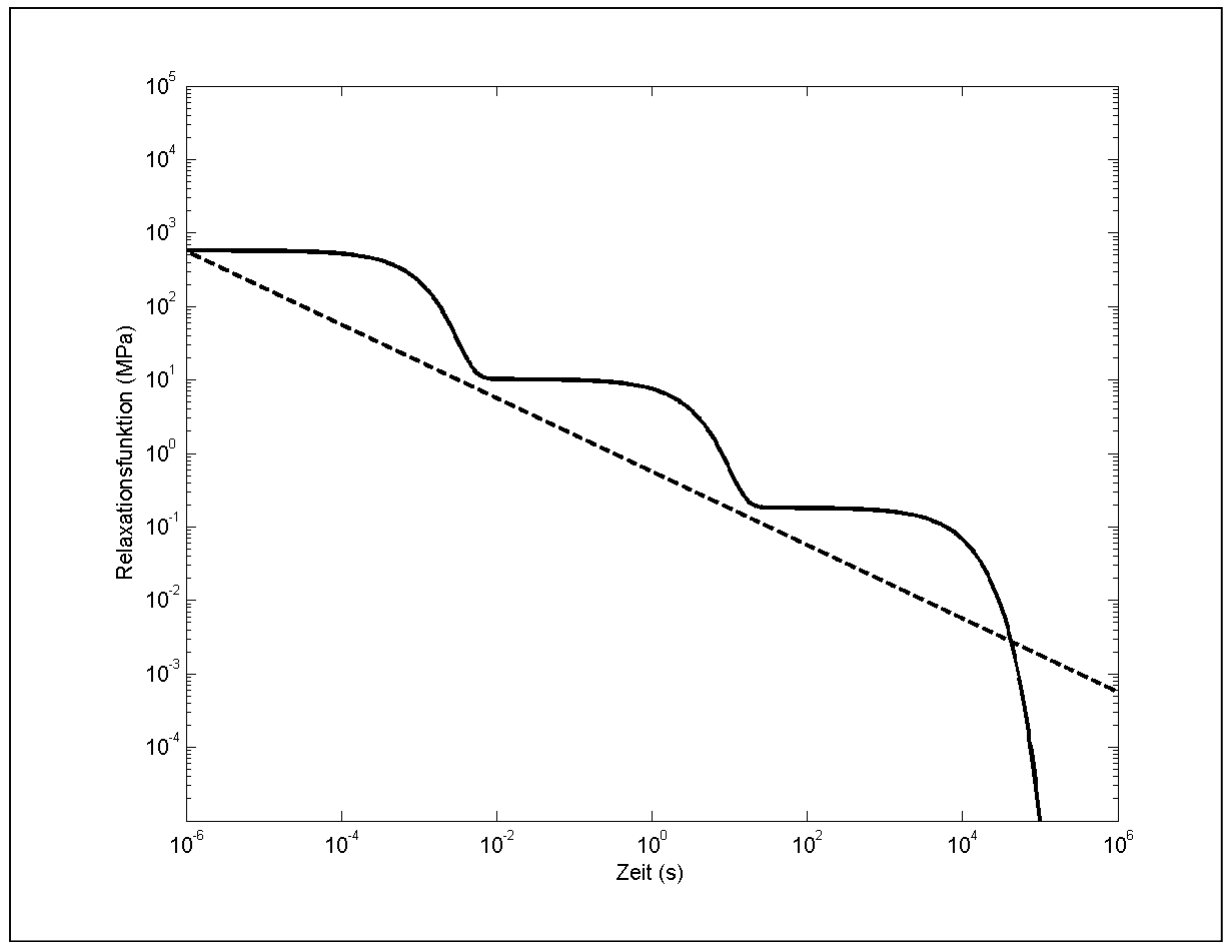
Relaxationsfunktion: $G(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tau}{t} \right)^\alpha$

Kontinuierliches Spektrum: $g(v) = \frac{E\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} v^{\alpha-1}$

Kumulatives Spektrum: $h(v) = \frac{E\tau^\alpha v^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \quad (\text{mit } \alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(1+\alpha))$

Zeitbereich: $t_{\min} = 10^{-2} \text{ s}, \quad t_{\max} = 10^3 \text{ s}$

Modellparameter: $v_{\min} = 10^{-4} \text{ s}, \quad v_{\max} = 10^3 \text{ s}, \quad n = 3, 5, 10, 20$



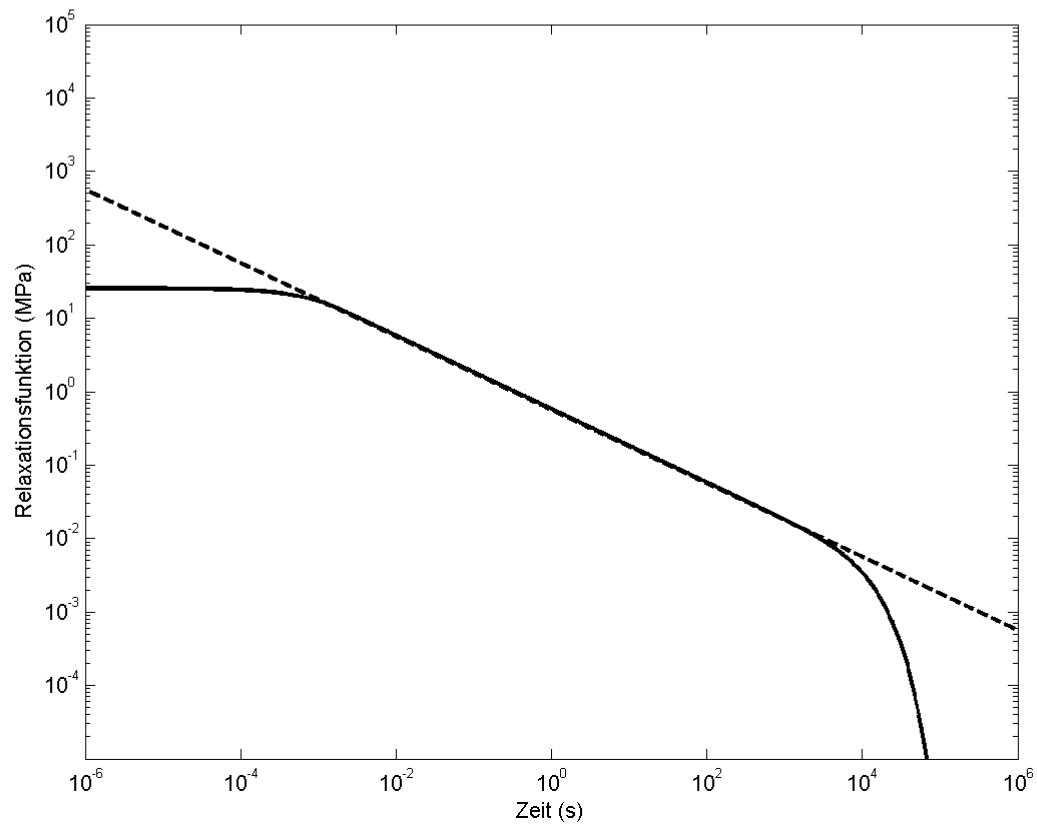
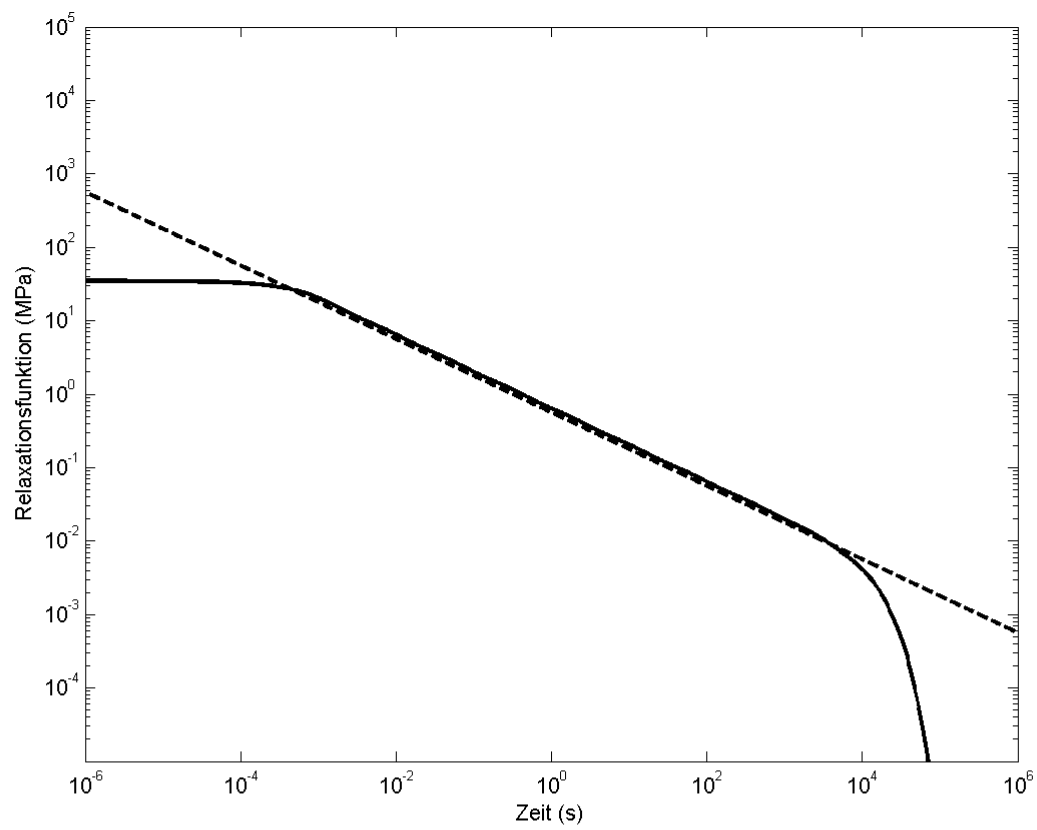
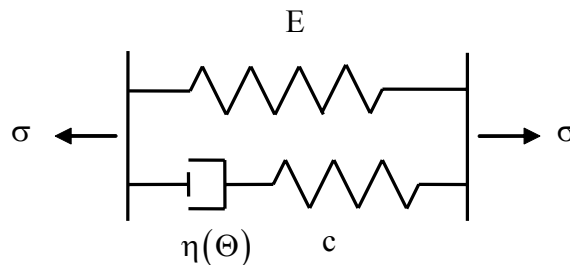


Abbildung 12-3 Approximation des fraktionellen Dämpfers mit $n=3, 5, 10, 20$ Elementen

13 Thermorheologisch einfache Stoffe

Bei vielen Polymeren ist die Annahme zutreffend, dass im Rahmen der Modellbildungsmethodik der linearen Viskoelastizität nur die Relaxationszeiten bzw. -frequenzen (analog die Retardationszeiten bzw. -frequenzen) von der Temperatur abhängen, nicht aber die elastischen Moduli und Nachgiebigkeiten. Wenn dabei alle Relaxationszeiten bzw. -frequenzen des Werkstoffes auf genau dieselbe Weise von der Temperatur abhängen, so wird dieser Werkstoff als thermorheologisch einfach bezeichnet. Wenn diese Annahme nicht gilt, so ist das Material thermorheologisch komplex.

Motivation der Theorie anhand eines Beispiels



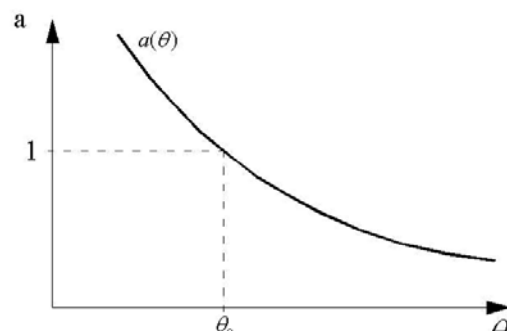
Temperaturabhängige Viskosität: $\eta(\Theta) = \eta(\Theta_0) a(\Theta)$

Θ_0 ist eine beliebige Referenztemperatur, $a(\Theta_0) = 1$ (Normierung), $a(\Theta) > 0$

Wenn man die Temperatur erhöht, d.h. $\Theta > \Theta_0$, so wird die Viskosität von Polymeren kleiner.

Für $\Theta < \Theta_0$ nehmen die viskosen Stoffeigenschaften zu, so dass für die Funktion $a(\Theta)$ die Ungleichung

$$\frac{da}{d\Theta} \leq 0 \text{ gilt.}$$



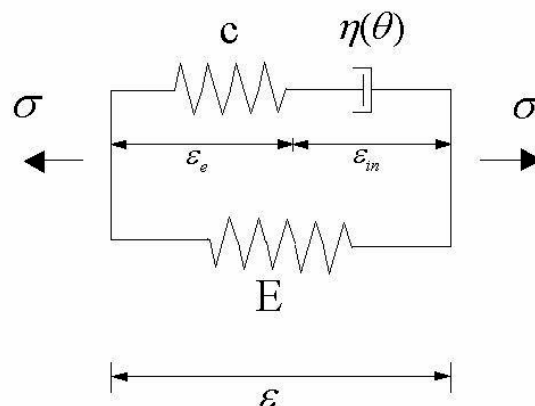
Für das rheologische Modell gilt:

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov} = E\varepsilon + \sigma_{ov}$$

$$\sigma_{ov} = c\varepsilon_e = c(\varepsilon - \varepsilon_{in})$$

$$\dot{\varepsilon}_{in} = \frac{1}{\eta(\Theta)} \sigma_{ov} = \frac{1}{\eta(\Theta_0) a(\Theta)} \sigma_{ov}$$

$$\dot{\sigma}_{ov} = c\dot{\varepsilon} - \frac{c}{\eta(\Theta_0) a(\Theta)} \sigma_{ov} \quad *$$



Definition eines temperaturabhängigen neuen Zeitmaßstabes:

$$dz = \frac{dt}{a(\Theta(t))} \Leftrightarrow \dot{z} = \frac{1}{a(\Theta(t))}$$

$$\Rightarrow z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a(\Theta(s))}$$

Für den Spezialfall der Referenztemperatur $\Theta(s) = \Theta_0$ gilt $a(\Theta_0) = 1$.

Gilt für den Zeitbereich $0 \leq s \leq t$, $\Theta(s) = \Theta_0 = \text{const}$, so folgt:

$$z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a(\Theta_0)} = \frac{t}{a(\Theta_0)} = t$$

Andernfalls läuft die materielle Zeit z schneller oder langsamer als die physikalische Zeit t ab.

a) $\Theta(t) > \Theta_0 \Rightarrow a(\Theta) < 1 \Rightarrow \dot{z} = 1/a(\Theta) > 1,$

d.h. die materialeigene Zeit läuft schneller ab als die physikalische Zeit.

b) $\Theta(t) < \Theta_0 \Rightarrow a(\Theta) > 1 \Rightarrow \dot{z} = 1/a(\Theta) < 1,$

d.h. die materialeigene Zeit läuft langsamer ab als die reale Zeit t .

Ist eine Funktion, z.B. die Spannung $\sigma(z)$ als Funktion der materialeigenen Zeit z gegeben, so gilt für ihre Zeitableitung die Kettenregel:

$$\dot{\sigma}(z) = \frac{d}{dt} \sigma(z(t)) = \frac{d\sigma}{dz} \dot{z} = \frac{1}{a(\Theta)} \sigma'(z)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung * auf der vorherigen Seite:

$$\dot{\sigma}_{ov} a(\Theta) = c \dot{\epsilon} a(\Theta) - \frac{c}{\eta(\Theta_0)} \sigma_{ov} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sigma'_{ov} = c \epsilon' - \frac{c}{\eta(\Theta_0)} \sigma_{ov}, \quad \frac{c}{\eta(\Theta_0)} = \frac{1}{\tau(\Theta_0)} = v(\Theta_0) = v_0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung geschieht analog zu Kapitel 4.1:

$$\sigma_{ov}(z) = \int_0^z c e^{-v_0(z-\xi)} \epsilon'(\xi) d\xi$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma(t) = \int_0^{z(t)} \left\{ E + c e^{-v_0(z-\xi)} \right\} \epsilon'(\xi) d\xi, \quad z = \int_0^t \frac{ds}{a(\Theta(s))}$$

Dieses Funktional hat formal dasselbe Aussehen wie das aus Kapitel 4.1 des Dreiparameter-Modells. Der Unterschied besteht darin, dass die real ablaufende Zeit t durch die materialeigene Zeit $z(t)$, die ein Funktional der Temperaturgeschichte ist, ersetzt wurde.

13.1 Lineare Viskoelastizität mit temperaturabhängiger Zeitskala

Um zu einer allgemeineren Theorie der linearen Thermoviskoelastizität für thermorheologisch einfache Stoffe zu gelangen, wird die Relaxationsfunktion vom Exponentialtyp durch eine allgemeine Relaxationsfunktion $G(z)$ ersetzt. In Bezug auf die zugehörige Kriechdarstellung wird analog verfahren und eine von der temperaturabhängigen Zeitskala abhängige Kriechfunktion $J(z)$ eingeführt.

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= \int_{-\infty}^{z(t)} G(z(t) - \xi) \varepsilon'(\xi) d\xi \quad * \\ \varepsilon(z) &= \int_{-\infty}^{z(t)} J(z(t) - \xi) \sigma'(\xi) d\xi \quad ** \\ \text{mit } z(t) &= \int_0^t \frac{ds}{a(\Theta(s))}, \quad \xi(u) = \int_0^u \frac{ds}{a(\Theta(s))}\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}G(z) &= \sum_{k=1}^n G_k e^{-v_k z} + E, \quad \underbrace{G_k = \text{const}, v_k = \text{const}, E = \text{const}}_{\text{temperaturunabhängig}} \\ \varepsilon(t) &\equiv 0 \text{ für } -\infty < t \leq 0, \quad \sigma(t) \equiv 0 \text{ für } -\infty < t \leq 0 \\ \Rightarrow \sigma &= E\varepsilon + \sum_{k=1}^n \sigma_{ovk} \\ \sigma_{ovk} &= \int_0^z G_k e^{-v_k(z-\xi)} \varepsilon'(\xi) d\xi \\ \dot{\sigma}_{ovk} &= [G_k \varepsilon'(z) - v_k \sigma_{ovk}] \dot{z}(t) \\ \Rightarrow \dot{\sigma}_{ovk} &= G_k \dot{\varepsilon} - v_k \dot{z} \sigma_{ovk} \\ \Rightarrow \dot{\sigma}_{ovk}(t) &= G_k \dot{\varepsilon} - \frac{v_k}{a(\Theta)} \sigma_{ovk}, \quad \text{für } k = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man die Faktoren $v_k/a(\Theta)$ in obiger Differentialgleichung als temperaturabhängige Viskositäten interpretiert, d.h.

$$\frac{v_k}{a(\Theta)} = \frac{G_k}{\eta_k(\Theta)} \Leftrightarrow \eta_k(\Theta) = \frac{G_k}{v_k} a(\Theta)$$

so erkennt man, dass unter der Annahme der thermorheologischen Einfachheit alle Viskositäten der Maxwell-Kette auf dieselbe Weise von der Temperatur abhängen. Ob sich ein gegebener viskoelastischer Werkstoff so verhält, bleibt natürlich experimentell zu überprüfen. Jedenfalls vereinfacht sich durch die Annahme der thermorheologischen Einfachheit vieles, insbesondere die Identifikation der Materialparameter.

Nimmt man analog eine Kriechfunktion der Form

$$J(z) = \frac{1}{E} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k} \{1 - e^{-v_k z}\}$$

an, so ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{\text{ink}}$$

$$\text{mit } \varepsilon_{\text{ink}} = \int_0^z \frac{1}{G_k} \{1 - e^{-v_k(z-\xi)}\} \sigma'(\xi) d\xi$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon}_{\text{ink}} = \left(v_k \int_0^z \frac{1}{G_k} e^{-v_k(z-\xi)} \sigma'(\xi) d\xi \right) \dot{z}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{ink}} = \left(-v_k \int_0^z \frac{1}{G_k} \{1 - e^{-v_k(z-\xi)}\} \sigma'(\xi) d\xi + \int_0^z \frac{v_k}{G_k} \sigma'(\xi) d\xi \right) \dot{z}, \text{ Addition einer Null}$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon}_{\text{ink}} = -\frac{v_k}{a(\Theta)} \varepsilon_{\text{ink}} + \frac{v_k}{G_k a(\Theta)} \sigma$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varepsilon}_{\text{ink}} = \frac{v_k}{a(\Theta)} \left\{ \frac{\sigma}{G_k} - \varepsilon_{\text{ink}} \right\} \Leftrightarrow \sigma = G_k \varepsilon_{\text{ink}} + \frac{G_k}{v_k} a(\Theta) \dot{\varepsilon}_{\text{ink}}$$

Interpretiert man die Funktionen $(G_k/v_k)a(\Theta) = \eta_k(\Theta)$ als temperaturabhängige Viskositäten von in Reihe geschalteten Kelvin-Elementen, so hängen auch hier alle Viskositäten auf dieselbe Weise von der Temperatur ab.

Abschließend sollte bemerkt werden, dass das Konzept der thermorheologisch einfachen Stoffe eine sinnvolle und häufig zutreffende Vereinfachung darstellt, aber dass sich reale Werkstoffe keinesfalls so verhalten müssen.

13.2 Verschiebungsprinzipien

Untersucht man thermorheologisch einfache Stoffe bei isothermen Prozessen im Zeit- oder Frequenzbereich, so gelten Zeit-Temperatur und Zeit-Frequenz Verschiebungsprinzipien, die die Parameterbestimmung wesentlich vereinfachen. Sie werden nun mathematisch präzisiert.

$$\left. \begin{aligned} \text{Für } \underline{\Theta = \text{const}} \text{ gilt: } z(t) &= \int_0^t \frac{ds}{a(\Theta)} = \frac{t}{a(\Theta)} \\ \xi(u) &= \int_0^u \frac{ds}{a(\Theta)} = \frac{u}{a(\Theta)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z - \xi = \frac{t - u}{a(\Theta)}$$

Für konstante Temperatur $\Theta = \text{const}$ erhält man die neue materialeigene Zeitvariable z indem man die reale Zeit t durch die Funktion (bzw. die Konstante) $a(\Theta)$ dividiert.

Damit vereinfachen sich die beiden Funktionale * und ** von Kapitel 13.1 zu:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G\left(\frac{t-u}{a(\Theta)}\right) \dot{\varepsilon}(u) du$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J\left(\frac{t-u}{a(\Theta)}\right) \dot{\sigma}(u) du$$

Durch Substitution von:

$$\xi = \frac{u}{a(\Theta)} \Rightarrow d\xi = \frac{1}{a(\Theta)} du$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi = \left(\frac{d\varepsilon}{du} a(\Theta)\right) \left(\frac{1}{a(\Theta)} du\right) = \dot{\varepsilon}(u) du$$

$$\sigma = \int_{-\infty}^{z(t)} G(z(t) - \xi(u)) \frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi$$

$$\xi = \int_0^u \frac{ds}{a(\Theta(s))}, \quad \frac{d}{du}(\varepsilon(\xi(u))) = \frac{d\varepsilon}{d\xi} \frac{d\xi}{du} \Leftrightarrow \frac{d}{du}(\varepsilon(\xi(u))) du = \frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi$$

$$\sigma = \int_{-\infty}^t G\left(\int_0^t \frac{ds}{a(\Theta(s))} - \int_0^u \frac{ds}{a(\Theta(s))}\right) \frac{d\varepsilon(\xi(u))}{du} du$$

$$\sigma = \int_{-\infty}^t G\left(\int_u^t \frac{ds}{a(\Theta(s))}\right) \frac{d\varepsilon(\xi(u))}{du} du$$

mit $\Theta = \text{const} = \Theta_0$

$$\sigma = \int_{-\infty}^t G\left(\frac{t-u}{a(\Theta_0)}\right) \dot{\varepsilon}(u) du$$

Damit gilt für die Temperaturabhängigkeit der Relaxations- und Kriechfunktion:

$$G(t, \Theta) = G(t/a(\Theta), \Theta_0) \Leftrightarrow G(t, \Theta) = G\left(b^{\log_b(t) - \log_b(a(\Theta))}, \Theta_0\right)$$

$$J(t, \Theta) = J(t/a(\Theta), \Theta_0) \Leftrightarrow J(t, \Theta) = J\left(b^{\log_b(t) - \log_b(a(\Theta))}, \Theta_0\right)$$

Die rechts stehenden Relationen folgen aus der Identität $t/a = b^{\log_b(t/a)}$, wobei $\log_b(x)$ den Logarithmus zur Basis b der Größe x bezeichnet.

Trägt man die Relaxations- bzw. Kriechkurven eines thermorheologisch einfachen Materials über einer logarithmischen Zeitachse auf, so bewirken Temperaturverringerungen gegenüber der Referenztemperatur ($\Theta < \Theta_0 \Rightarrow a(\Theta) > 1$ bzw. $\log_b(a(\Theta)) > 0$) Verschiebungen der Relaxations- bzw. Kriechkurven nach rechts in Richtung größerer Zeiten. Erhöhungen gegenüber der Referenztemperatur Θ_0 bewirken wegen $\Theta > \Theta_0 \Rightarrow a(\Theta) < 1$ bzw. $\log_b(a(\Theta)) < 0$ Verschiebungen nach links zu kleineren Zeiten.

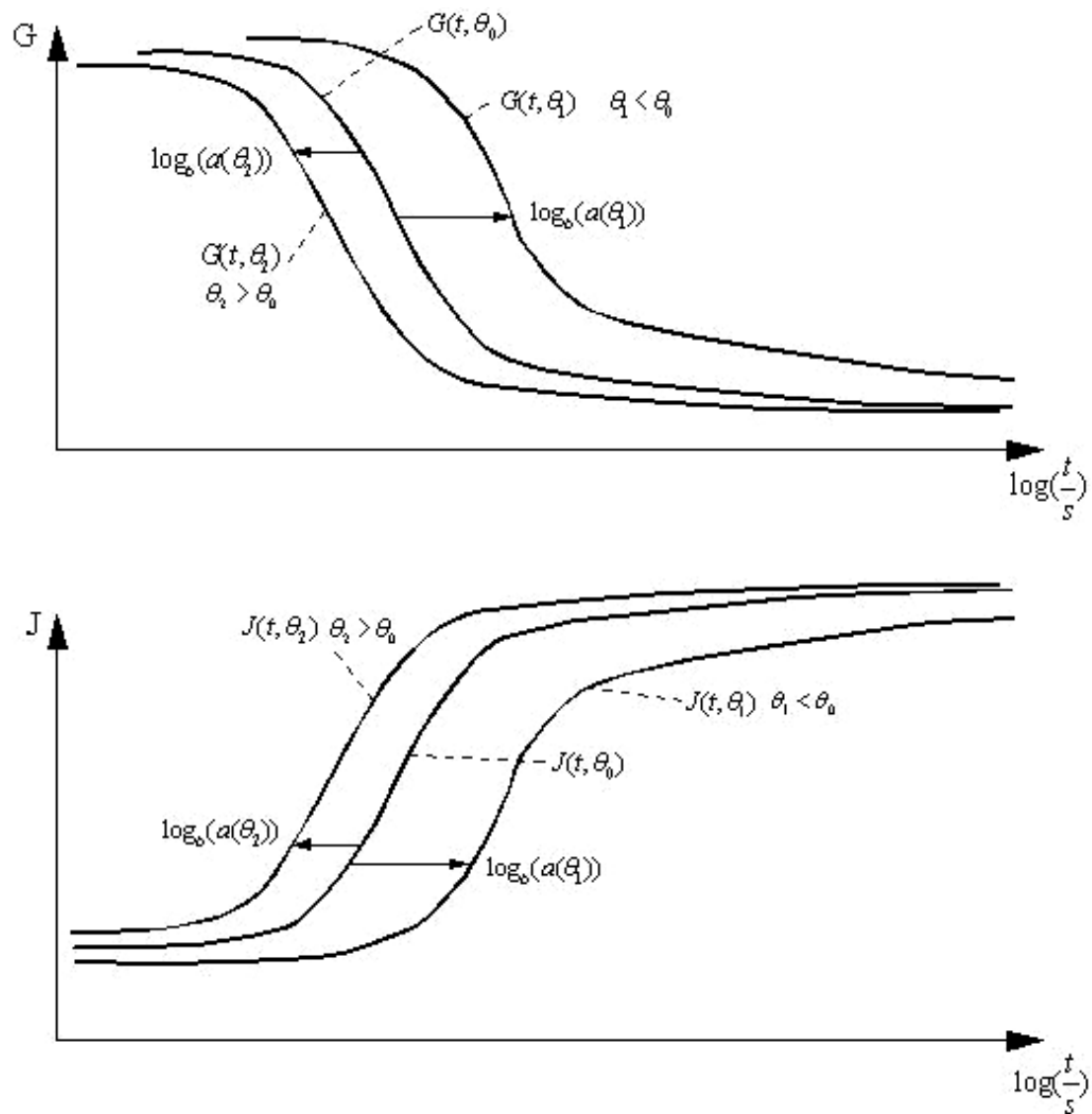


Abbildung 13-1 Verschiebungen von G und J als Resultat von Temperaturänderungen

Die Relaxations- und Kriechkurven bei den Temperaturen Θ_1 und Θ_2 gehen aus den Relaxations- und Kriechkurven bei der Referenztemperatur durch Parallelverschiebung hervor. Dies gilt nur bei einer logarithmischen Zeitachse.

Um die Temperaturabhängigkeit der komplexen dynamischen Moduli und Nachgiebigkeiten zu untersuchen, werden die temperaturabhängigen Relaxations- und Kriechfunktionen

$$G(t, \Theta) = G\left(\frac{t}{a(\Theta)}, \Theta_0\right) \text{ und } J(t, \Theta) = J\left(\frac{t}{a(\Theta)}, \Theta_0\right)$$

in die entsprechenden Formeln in Kapitel 6 eingesetzt. Für den Speichermodul gilt:

$$G'(\omega, \Theta) = G(\infty) + \omega \int_0^\infty \left\{ G\left(\frac{s}{a(\Theta)}, \Theta_0\right) - G(\infty) \right\} \sin \omega s \, ds$$

Nun wird eine Substitution durchgeführt, die nachweist, dass die beiden dynamischen Moduli nicht vollkommen beliebig von der Frequenz und der Temperatur abhängen, sondern von dem Produkt $\omega a(\Theta)$:

$$u := \frac{s}{a(\Theta)} \Rightarrow ds = a(\Theta) du, \quad \omega s = \omega a(\Theta) u$$

$$\Rightarrow \underline{G'(\omega, \Theta) = G(\infty) + \omega a(\Theta) \int_0^{\infty} \{G(s, \Theta_0) - G(\infty)\} \sin(\omega a(\Theta) s) ds}$$

Analog ergibt sich für den Verlustmodul

$$\underline{G''(\omega, \Theta) = \omega a(\Theta) \int_0^{\infty} \{G(s, \Theta_0) - G(\infty)\} \cos(\omega a(\Theta) s) ds}$$

sowie für die Speicher- und die Verlustnachgiebigkeit (vgl. Kapitel 6)

$$\underline{J'(\omega, \Theta) = J(\infty) - \omega a(\Theta) \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s, \Theta_0)\} \sin(\omega a(\Theta) s) ds}$$

und

$$\underline{J''(\omega, \Theta) = \omega a(\Theta) \int_0^{\infty} \{J(\infty) - J(s, \Theta_0)\} \cos(\omega a(\Theta) s) ds.}$$

An diesen Ergebnissen ist zu erkennen, dass die Kreisfrequenz und die Temperatur jeweils in der Form $\omega a(\Theta)$ vorkommen. Damit gelten folgende Zusammenhänge für die frequenzabhängigen Materialfunktionen:

$$G'(\omega, \Theta) = G'(\omega a(\Theta), \Theta_0) \Leftrightarrow G'(\omega, \Theta) = G'\left(b^{\log_b(\omega) + \log_b(a(\Theta))}, \Theta_0\right)$$

$$G''(\omega, \Theta) = G''(\omega a(\Theta), \Theta_0) \Leftrightarrow G''(\omega, \Theta) = G''\left(b^{\log_b(\omega) + \log_b(a(\Theta))}, \Theta_0\right)$$

$$J'(\omega, \Theta) = J'(\omega a(\Theta), \Theta_0) \Leftrightarrow J'(\omega, \Theta) = J'\left(b^{\log_b(\omega) + \log_b(a(\Theta))}, \Theta_0\right)$$

$$J''(\omega, \Theta) = J''(\omega a(\Theta), \Theta_0) \Leftrightarrow J''(\omega, \Theta) = J''\left(b^{\log_b(\omega) + \log_b(a(\Theta))}, \Theta_0\right)$$

Im Vergleich zur Temperaturabhängigkeit der Relaxations- und Kriechfunktion im Zeitbereich bewirken bei den frequenzabhängigen Funktionen G', J', G'', J'' Temperaturerhöhungen Verschiebungen nach rechts zu höheren Frequenzen. Bei Temperaturverringerungen werden die dynamischen Funktionen nach links zu kleineren Frequenzen verschoben.

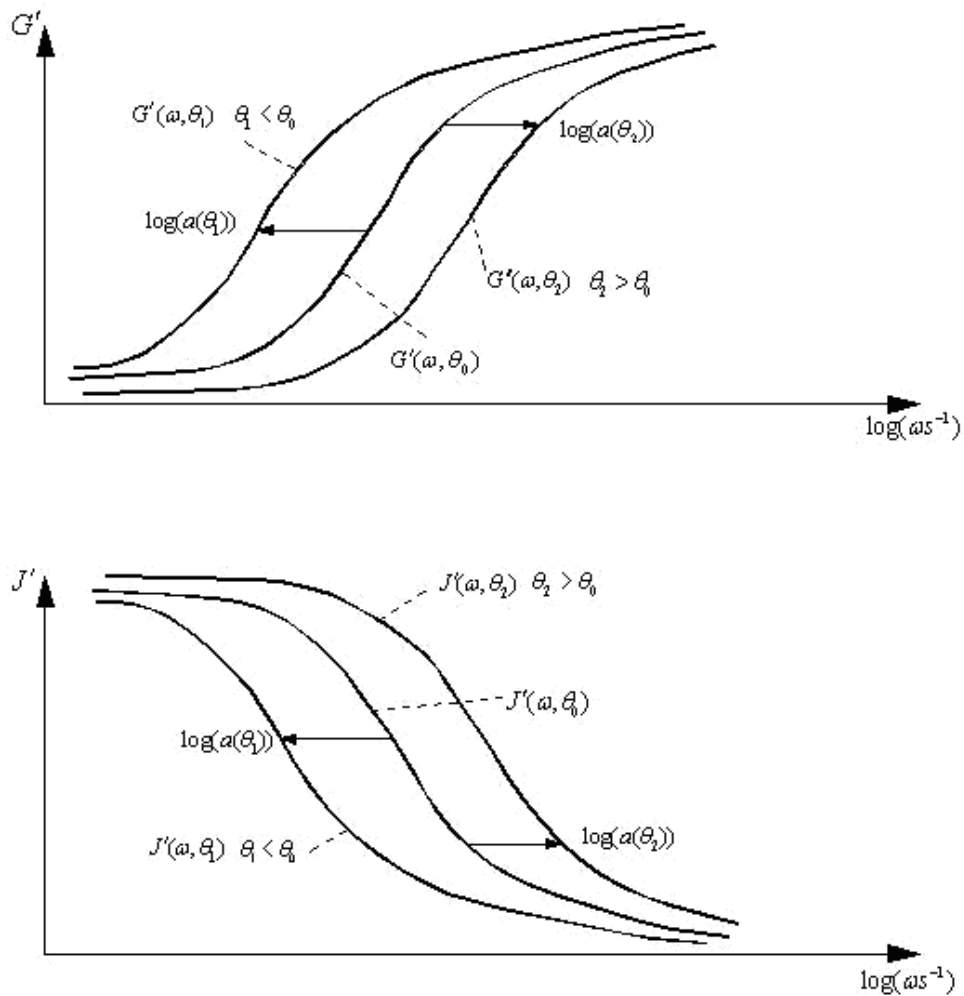


Abbildung 13-2 Verschiebung G' und J' als Funktion der Temperatur

Für die Verlustmoduli und -nachgiebigkeiten, die oftmals ein ausgeprägtes Maximum aufweisen, ergeben sich entsprechende Abhängigkeiten.

Wenn man entsprechende Experimente bei konstanten Temperaturen durchführt, kann man die Verschiebungsfunktion, d.h. die Temperaturabhängigkeit der Viskositäten, identifizieren.

13.3 Stoffeigenschaften bei unterschiedlichen Temperaturen: Masterkurve

In der experimentellen Materialuntersuchung ist es sehr beliebt, Relaxations-, Kriech oder dynamische Experimente in einem bestimmten Zeit- oder Frequenzbereich bei unterschiedlichen Temperaturen durchzuführen. Die auf diese Weise gewonnenen Daten lassen sich über einer logarithmischen Frequenz- oder Zeitachse parallel verschieben, so dass man unter bestimmten Annahmen Information über das Zeit- oder Frequenzbereichsverhalten in einem deutlich größeren Bereich bei einer beliebig wählbaren Referenztemperatur erhält.

- Versuche bei isothermen Prozessen im Zeit- oder im Frequenzbereich
- Temperaturen: $\Theta_{-2} < \Theta_{-1} < \Theta_0 < \Theta_1 < \Theta_2$
- Referenztemperatur: Θ_0

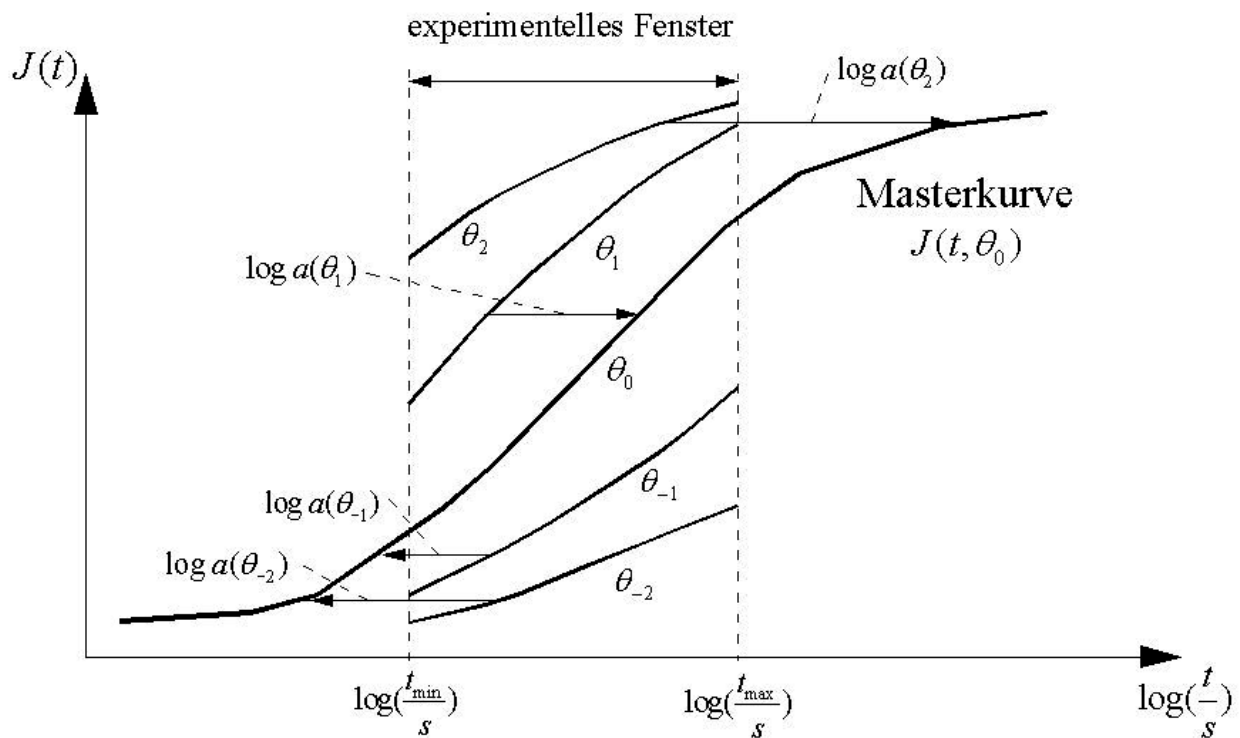


Abbildung 13-3 Erzeugung der Masterkurve und experimentelles Fenster

In der obigen Abbildung ist $t_{\min}$ z.B. durch die Abtastrate des Messsignals gegeben und $t_{\max}$ ist z.B. durch die maximal sinnvolle Versuchsdauer bestimmt.

Um die Methode anwenden zu können, ermittelt man zunächst eine der viskoelastischen Funktionen $G(t, \Theta_i)$, $J(t, \Theta_i)$, $G'(t, \Theta_i)$, $G''(t, \Theta_i)$, $J'(t, \Theta_i)$ oder $J''(t, \Theta_i)$ in dem experimentell zugänglichen Zeit- oder Frequenzbereichsfenster, das entweder durch $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ oder $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ gegeben ist. Diese Messungen werden für verschiedene konstante Tempera-

turen Θ_i gemacht. Anschließend wählt man eine Temperatur als Referenztemperatur aus. Die zu den anderen Temperaturen gehörigen viskoelastischen Funktionen werden nun solange parallel nach rechts oder links verschoben, bis man eine mehr oder weniger glatte Masterkurve erhalten hat. Diese beschreibt dann das zeit- oder frequenzabhängige viskoelastische Materialverhalten bei der Referenztemperatur in einem erheblich größeren Zeit- oder Frequenzbereich. Trägt man anschließend die Verschiebungen $\log(a(\Theta_i))$ über der Temperatur Θ_i auf, so erhält man die temperaturabhängige Verschiebungsfunktion.

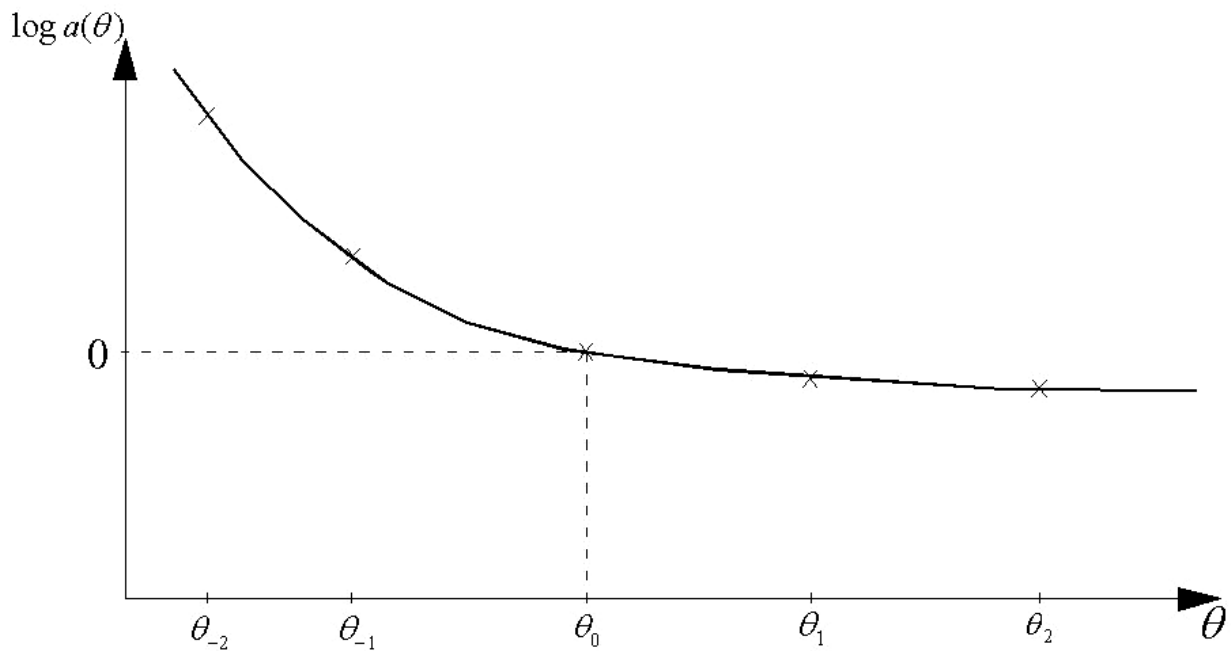


Abbildung 13-4 Verschiebungsfunktion

Bemerkung: Die im Rahmen des Konzeptes der thermorheologisch einfachen Stoffe gemachten Aussagen können prinzipiell auf andere Abhängigkeiten ausgeweitet werden. Die materialeigene Zeitskala $z(t)$ kann z.B. von der Feuchte des Werkstoffes, von einer beliebigen internen Variablen, von der Deformationsgeschichte oder auch der Spannung abhängen.

Temperatur	Spannung	Dehnrage	Feuchtegehalt
$\dot{z} = \frac{1}{a(\Theta)}$	$\dot{z} = \frac{1}{f(\sigma)}$	$\dot{z} = \frac{1}{g(\dot{\epsilon})}$	$\dot{z} = \frac{1}{h(\rho)}$

Wenn die betreffende Variable in den Versuchen konstant gehalten werden kann und sich das Material in Bezug auf diese Größe rheologisch einfach verhält, ergibt sich ein entsprechendes Verschiebungsprinzip.

14 Anisotrope lineare Viskoelastizität

Funktionale Relationen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t-s) \dot{\mathbf{E}}(s) ds \Leftrightarrow T_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-s) \dot{E}_{kl}(s) ds \\ &\Leftrightarrow \\ \mathbf{E}(t) &= \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t-s) \dot{\mathbf{T}}(s) ds \Leftrightarrow E_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(t-s) \dot{T}_{kl}(s) ds \end{aligned}$$

Wegen $G_{ijkl} = G_{jikl}$ und $G_{ijkl} = G_{ijlk}$ bzw. $J_{ijkl} = J_{jikl}$ und $J_{ijkl} = J_{ijlk}$ haben die Tensoren $\mathbf{G}^4(t)$ und $\mathbf{J}^4(t)$ maximal 36 unabhängige Komponenten. Diese kann man bequem durch eine Voigtsche Matrix darstellen, wenn man den Spannungs- und Verzerrungstensor jeweils als 6er-Vektor darstellt. Diese Vektoren ändern natürlich nichts am Tensorcharakter der Spannungen und Deformationen. Sie werden durch die Symbole $\underline{\mathbf{T}}$ und $\underline{\mathbf{E}}$ dargestellt.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &: [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T =: \underline{\mathbf{T}} \\ \mathbf{E} &: [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}]^T =: \underline{\mathbf{E}} \\ \mathbf{G}^4 &: \begin{bmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) & \cdots & G_{16}(t) \\ \vdots & & & \\ G_{61}(t) & & \cdots & G_{66}(t) \end{bmatrix} =: \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t) \\ \mathbf{J}^4 &: \begin{bmatrix} J_{11}(t) & J_{12}(t) & \cdots & J_{16}(t) \\ \vdots & & & \\ J_{61}(t) & & \cdots & J_{66}(t) \end{bmatrix} =: \underline{\underline{\mathbf{J}}}(t) \\ \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}^T &= \mathbf{T}, \quad \mathbf{E}^T = \mathbf{E} \\ \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} &= \underline{\mathbf{T}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{E}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dies ist eine Motivation für die} \\ \text{Faktoren "2" vor den Scherdehnungen} \end{array} \right. \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung wird jeweils die Spannungsleistung berechnet, zum einen mit den Tensoren $\mathbf{T}$ und $\dot{\mathbf{E}}$ und zum anderen mit den Repräsentationen durch die Spaltenvektoren $\underline{\mathbf{T}}$ und $\dot{\underline{\mathbf{E}}}$. Der Faktor 2 vor den Scherdehnungen kann dadurch motiviert werden, dass im tensoriellen Skalarprodukt $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ aufgrund der Symmetrie von Spannungs- und Deformationstensor die Leistungen der Scherdehnungen an den Schubspannungen jeweils zweimal vorkommen und im vektoriellen Skalarprodukt $\underline{\mathbf{T}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{E}}}$ nur einmal. Man kann den Faktor 2 auch al-

ternativ vor die Schubspannungen schreiben oder jeweils einen Faktor $\sqrt{2}$ vor die Scherdehnungen und die Schubspannungen. In der Literatur findet man alle Alternativen vor.

Mit diesen Begriffsbildungen und Vereinbarungen lauten die Materialgleichungen der anisotropen linearen Viskoelastizität wie folgt:

$$\underline{\mathbf{T}}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{\mathbf{G}}(t-s) \dot{\underline{\mathbf{E}}}(s) ds \Leftrightarrow \underline{\mathbf{E}}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{\mathbf{J}}(t-s) \dot{\underline{\mathbf{T}}}(s) ds$$

bzw. in Komponentenform:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) \\ \sigma_{22}(t) \\ \sigma_{33}(t) \\ \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{23}(t) \\ \sigma_{31}(t) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^t \begin{bmatrix} G_{11}(t-s) & \cdots & G_{16}(t-s) \\ \vdots & & \\ G_{61}(t-s) & \cdots & G_{66}(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11}(s) \\ \dot{\epsilon}_{22}(s) \\ \dot{\epsilon}_{33}(s) \\ 2\dot{\epsilon}_{12}(s) \\ 2\dot{\epsilon}_{23}(s) \\ 2\dot{\epsilon}_{31}(s) \end{bmatrix} ds$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}(t) \\ \epsilon_{22}(t) \\ \epsilon_{33}(t) \\ 2\epsilon_{12}(t) \\ 2\epsilon_{23}(t) \\ 2\epsilon_{31}(t) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^t \begin{bmatrix} J_{11}(t-s) & \cdots & J_{16}(t-s) \\ \vdots & & \\ J_{61}(t-s) & \cdots & J_{66}(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11}(s) \\ \dot{\sigma}_{22}(s) \\ \dot{\sigma}_{33}(s) \\ \dot{\sigma}_{12}(s) \\ \dot{\sigma}_{23}(s) \\ \dot{\sigma}_{31}(s) \end{bmatrix} ds$$

Im Experiment lässt sich der Spannungstensor im Gegensatz zum Verzerrungstensor vollständig vorgeben (einachsige Zug/Druck-Prüfmaschine). Ist man in der Lage, den Verzerrungszustand vollständig zu messen, so kann die Voigtsche Matrix der Retardationsfunktionen leicht ermittelt werden.

Beispiel: Kriechversuch in 1-Richtung: Vorgabe einer einzigen Spannungskomponente, Messung aller resultierenden Dehnungen.

$$\underline{\mathbf{T}} = [\sigma_{11} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \sigma_{11} = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \sigma_0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11}(t) &= J_{11}(t) \sigma_0 \\ \epsilon_{22}(t) &= J_{21}(t) \sigma_0 \\ \epsilon_{33}(t) &= J_{31}(t) \sigma_0 \\ 2\epsilon_{12}(t) &= J_{41}(t) \sigma_0 \\ 2\epsilon_{23}(t) &= J_{51}(t) \sigma_0 \\ 2\epsilon_{31}(t) &= J_{61}(t) \sigma_0 \end{aligned} \right\}$$

Damit kann, wenn man in der Lage ist, alle Dehnungen zu messen, die erste Spalte der Voigtschen Nachgiebigkeitsfunktionsmatrix identifiziert werden. Durch Kriechversuche in den anderen fünf Richtungen lassen sich im Prinzip alle 36 Kriechfunktionen ermitteln.

14.1 Tensorielle dynamische Moduli und Nachgiebigkeiten

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{T}}(t) &= \int_0^t \underline{\mathbf{G}}(t-s) \dot{\underline{\mathbf{E}}}(s) ds & \underline{\mathbf{T}}(t), \underline{\mathbf{E}}(t) &\equiv \underline{\mathbf{0}} \text{ für } t \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \underline{\mathbf{E}}(t) &= \int_0^t \underline{\mathbf{J}}(t-s) \dot{\underline{\mathbf{T}}}(s) ds\end{aligned}$$

Die Berechnungsformeln für die dynamischen Funktionen haben natürlich nur Sinn, wenn der Grenzwert $G(\infty) = 1/J(\infty)$ existiert. Falls $G(\infty) = 0 \Leftrightarrow J(\infty) = \infty$ bei einem Material gilt, ist es sinnvoller, eine partielle Integration durchzuführen und die mathematischen Beziehungen mit den Bezugswerten $G(0)$ und $J(0)$ zu formulieren. Dies geht durch partielle Integration der oben aufgeführten allgemeinen Funktionale:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{T}}(t) &= \underline{\mathbf{G}}(t-s) \underline{\mathbf{E}}(s) \Big|_0^t + \int_0^t \underline{\mathbf{G}}'(t-s) \underline{\mathbf{E}}(s) ds \\ \underline{\mathbf{T}}(t) &= \underline{\mathbf{G}}(0) \underline{\mathbf{E}}(t) + \int_0^t \underline{\mathbf{G}}'(t-s) \underline{\mathbf{E}}(s) ds\end{aligned}$$

Analog gilt für die Dehnungsdarstellung:

$$\underline{\mathbf{E}}(t) = \underline{\mathbf{J}}(0) \underline{\mathbf{T}}(t) + \int_0^t \underline{\mathbf{J}}'(t-s) \underline{\mathbf{T}}(s) ds$$

Setzt man nun dynamische Prozesse der Form $\underline{\mathbf{E}}(t) = \hat{\underline{\mathbf{E}}} e^{i\omega t}$ und $\underline{\mathbf{T}}(t) = \hat{\underline{\mathbf{T}}} e^{i\omega t}$ in die beiden Integrale ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{T}}} e^{i\omega t} &= \underline{\mathbf{G}}(0) \hat{\underline{\mathbf{E}}} e^{i\omega t} + \int_0^t \underline{\mathbf{G}}'(s) e^{i\omega(t-s)} ds \hat{\underline{\mathbf{E}}} \\ \Rightarrow \hat{\underline{\mathbf{T}}} &= \underline{\mathbf{G}}(0) \hat{\underline{\mathbf{E}}} + \int_0^t \underline{\mathbf{G}}'(s) e^{-i\omega s} ds \hat{\underline{\mathbf{E}}} \\ \Leftrightarrow \hat{\underline{\mathbf{T}}} &= \left[\underline{\mathbf{G}}(0) + \int_0^t \underline{\mathbf{G}}'(s) e^{-i\omega s} ds \right] \hat{\underline{\mathbf{E}}}\end{aligned}$$

Der stationäre Zustand ist für $t \rightarrow \infty$ erreicht:

$$\Rightarrow \hat{\underline{\mathbf{T}}} = \left[\underline{\mathbf{G}}(0) + \int_0^\infty \underline{\mathbf{G}}'(s) e^{-i\omega s} ds \right] \hat{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\mathbf{G}}^*(\omega) \hat{\underline{\mathbf{E}}} \quad *$$

Analog findet man:

$$\Rightarrow \hat{\underline{\mathbf{E}}} = \left[\underline{\mathbf{J}}(0) + \int_0^\infty \underline{\mathbf{J}}'(s) e^{-i\omega s} ds \right] \hat{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\mathbf{J}}^*(\omega) \hat{\underline{\mathbf{T}}} \quad **$$

Damit gilt unter der Annahme, dass $\underline{\mathbf{G}}(0)$ und $\underline{\mathbf{J}}(0)$ existieren.

$$1) \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(0) + \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{G}}}'(s) e^{-i\omega s} ds$$

$$2) \quad \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{J}}}(0) + \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{J}}}'(s) e^{-i\omega s} ds$$

für ein anisotropes linear viskoelastisches Material. Existieren diese Grenzwerte nicht, so sind die alternativen Relationen zu verwenden (tensorielle Verallgemeinerung).

$$3) \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty) + i\omega \int_0^\infty \{ \underline{\underline{\mathbf{G}}}(s) - \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty) \} e^{-i\omega s} ds$$

$$4) \quad \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{J}}}(\infty) - i\omega \int_0^\infty \{ \underline{\underline{\mathbf{J}}}(\infty) - \underline{\underline{\mathbf{J}}}(s) \} e^{-i\omega s} ds$$

Somit stehen je nach Existenz der unterschiedlichen Grenzwerte $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(0)$, $\underline{\underline{\mathbf{J}}}(0)$, $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty)$, $\underline{\underline{\mathbf{J}}}(\infty)$ für jede dynamische Materialfunktion zwei alternative Möglichkeiten der Berechnung zur Verfügung.

Aus den tensoriellen dynamischen Beziehungen (hier mit den Voigtschen Matrizen)

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) \hat{\underline{\underline{\mathbf{E}}}} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{\underline{\mathbf{E}}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega) \hat{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}$$

$$\text{folgt: } \hat{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega) \hat{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{0}}} = [\underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega) - \underline{\underline{\mathbf{1}}}] \hat{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) = (\underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega))^{-1}$$

Die Voigtschen Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega)$ und $\underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(\omega)$ sind also zueinander invers.

14.2 Tensorielle Relaxations- und Retardationsspektren

Die tensoriellen Verallgemeinerungen der diskreten und kontinuierlichen Relaxations- und Kriechspektren lassen sich von den in Kapitel 5 hergeleiteten skalaren Gleichungen auf jede Komponentenfunktion der entsprechenden Tensoren übertragen:

Diskretes Relaxationsspektrum

$$G_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n G_k^{ij} e^{-v_k^{ij} t} + G^{ij}(\infty), \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}} = \begin{bmatrix} G_{11}(t-s) & \cdots & G_{16}(t-s) \\ \vdots & & \\ G_{61}(t-s) & \cdots & G_{66}(t-s) \end{bmatrix}$$

Diskretes Kriechspektrum

$$J_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n J_k^{ij} (1 - e^{-v_k^{ij} t}) + J^{ij}(0), \quad \underline{\underline{\mathbf{J}}} = \begin{bmatrix} J_{11}(t-s) & \cdots & J_{16}(t-s) \\ \vdots & & \\ J_{61}(t-s) & \cdots & J_{66}(t-s) \end{bmatrix}$$

Diese Darstellungen bringen zum Ausdruck, dass jede Komponente G_{ij} und jede Komponente J_{ij} ihr individuelles Spektrum besitzt.

Kontinuierliches Relaxationsspektrum

$$G_{ij}(t) = \int_0^\infty g^{ij}(v) e^{-vt} dv + G^{ij}(\infty) \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{G}}}(t) = \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{g}}}(v) e^{-vt} dv + \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty)$$

Kontinuierliches Kriechspektrum

$$J_{ij}(t) = \int_0^\infty j^{ij}(v) [1 - e^{-vt}] dv + J^{ij}(0) \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{J}}}(t) = \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{j}}}(v) [1 - e^{-vt}] dv + \underline{\underline{\mathbf{J}}}(0)$$

Die Darstellung der Komponentenfunktionen durch diskrete Spektren ist aufgrund der vielen Materialparameter und eines weiteren Index ein klein wenig aufwändiger als eine Darstellung durch kontinuierliche Spektren. Zur Darstellung sämtlicher Komponenten von $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ und von $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ durch kontinuierliche Spektren kann dieselbe Integrationsvariable verwendet werden. Daher bietet es sich an, bei anisotropen Materialien mit den folgenden Darstellungen zu arbeiten:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(t) = \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{g}}}(v) e^{-vt} dv + \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty), \quad \underline{\underline{\mathbf{g}}} = \begin{bmatrix} g^{11}(v) & \cdots & g^{16}(v) \\ \vdots & & \\ g^{61}(v) & \cdots & g^{66}(v) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}(t) = \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{j}}}(v) [1 - e^{-vt}] dv + \underline{\underline{\mathbf{J}}}(0), \quad \underline{\underline{\mathbf{j}}} = \begin{bmatrix} j^{11}(v) & \cdots & j^{16}(v) \\ \vdots & & \\ j^{61}(v) & \cdots & j^{66}(v) \end{bmatrix}$$

Diese Darstellungen der tensoriellen Relaxations- und Kriechfunktionen wurden gewählt, da die Grenzwerte $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty)$ und $\underline{\underline{\mathbf{J}}}(0)$ immer endlich sind und daher existieren. Die Grenzwerte $\underline{\underline{\mathbf{G}}}(0)$ und $\underline{\underline{\mathbf{J}}}(\infty)$ müssen dagegen nicht immer existieren.

14.3 Zusammenhänge zwischen Moduli-, Nachgiebigkeiten und Spektren

Für den dynamischen Modultensor wird 3) verwendet und für den komplexen Nachgiebigkeitstensor der Ausdruck 2). Diese wurden in Kapitel 14.1 bereitgestellt.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathbf{G}}}^* &= \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty) + i\omega \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu) e^{-\nu s} d\nu e^{-i\omega s} ds \\
 \underline{\underline{\mathbf{G}}}^* &= \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty) + i\omega \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu) \left(\int_0^\infty e^{-(\nu+i\omega)s} ds \right) d\nu \\
 \underline{\underline{\mathbf{G}}}^* &= \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty) + i\omega \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu) \left[\frac{-1}{\nu+i\omega} e^{-(\nu+i\omega)s} \right]_0^\infty d\nu \\
 \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) &= \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty) + i\omega \int_0^\infty \frac{1}{\nu+i\omega} \underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu) d\nu
 \end{aligned}$$

Jede Komponente des Tensors der dynamischen Moduli

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(\omega) - \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty) \right) \frac{1}{i\omega} = \int_0^\infty \frac{1}{\nu+i\omega} \underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu) d\nu$$

hängt über eine skalare Stieltjes-Transformation mit der entsprechenden Komponentenfunktion von $\underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu)$ zusammen. Damit kann die inverse Stieltjes-Transformation auf jede Komponente angewendet werden:

$$\underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{\underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(-\nu - i\gamma) - \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty)}{-\nu - i\gamma} - \frac{\underline{\underline{\mathbf{G}}}^*(-\nu + i\gamma) - \underline{\underline{\mathbf{G}}}(\infty)}{-\nu + i\gamma} \right\}$$

Das Relaxationsspektrum in Form der Voigtschen Matrix $\underline{\underline{\mathbf{g}}}(\nu)$ lässt sich also direkt aus der Voigtschen Matrix der komplexen Moduli berechnen.

Bemerkung: Die in Kapitel 12 erarbeitete Methode zur Approximation kontinuierlicher Spektren durch diskrete Spektren kann im Kontext anisotroper linear viskoelastischer Werkstoffe offensichtlich komponentenweise angewendet werden. Aus pragmatischen Gründen bietet es sich an, für jede Komponente des tensoriellen Spektrums dieselbe Relaxationsfrequenzverteilung zu verwenden. Dann gilt in dem relevanten Zeit- oder Frequenzbereich:

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}(t) \approx \underline{\underline{\mathbf{G}}}_M(t) = \sum_{k=1}^n \underline{\underline{\mathbf{G}}}_k e^{-\nu_k t}$$

Um das tensorielle Kriechspektrum zu ermitteln, wird analog verfahren und von der folgenden Darstellung ausgegangen:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{J}}}^* &= \underline{\underline{\mathbf{J}}}(0) + \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{j}}}(\underline{\underline{\nu}}) e^{-\underline{\underline{\nu}}s} d\underline{\underline{\nu}} e^{-i\omega s} ds \\
\underline{\underline{\mathbf{J}}}^* &= \underline{\underline{\mathbf{J}}}(0) + \int_0^\infty \underline{\underline{\mathbf{j}}}(\underline{\underline{\nu}}) \left(\int_0^\infty e^{-(\underline{\underline{\nu}} + i\omega)s} ds \right) d\underline{\underline{\nu}} \\
\Rightarrow \underline{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}^*(\omega) &= \underline{\underline{\underline{\mathbf{J}}}}(0) + \int_0^\infty \underline{\underline{\underline{\mathbf{j}}}}(\underline{\underline{\nu}}) \frac{1}{\underline{\underline{\nu}} + i\omega} d\underline{\underline{\nu}}
\end{aligned}$$

In diesem Fall kann auch die inverse Stieltjes-Transformation auf jede Komponente angewendet werden, um das Kriechspektrum $\underline{\underline{\mathbf{j}}}(\underline{\underline{\nu}})$ zu ermitteln:

$$\underline{\underline{\mathbf{j}}}(\underline{\underline{\nu}}) = \frac{1}{2\pi \underline{\underline{\nu}} i} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(-\underline{\underline{\nu}} - i\gamma) - \underline{\underline{\mathbf{J}}}^*(-\underline{\underline{\nu}} + i\gamma) \right\}$$

Die Behandlung der anisotropen linearen Viskoelastizität hatte nur exemplarischen Charakter und sollte zeigen, dass sich die im Rahmen dieser Ausführungen formulierten Relationen einfach darauf komponentenweise anwenden lassen. Die konkrete Messung von anisotropen linear viskoelastischen Materialeigenschaften, soll hier allerdings nicht behandelt werden.

Abbildung 2-1 Rollendes Rad auf Unterlage	8
Abbildung 2-2 Referenz- und Momentankonfiguration.....	8
Abbildung 2-3 Dehnungskontrollierter Prozess und Spannungsantwort	12
Abbildung 2-4 Spannungskontrollierter Prozess und Dehnungsantwort	12
Abbildung 2-5 Beobachtbares Materialverhalten	13
Abbildung 4-1 Verschiedene Kennlinien	19
Abbildung 4-2 Rampenfunktion (Dehnung)	20
Abbildung 4-3 Relaxationsfunktion $G(t)$ der Dreiparameter-Modells.....	21
Abbildung 4-4 Rampenfunktion (Spannung).....	21
Abbildung 4-5 Kriechfunktion $J(t)$ des Dreiparameter-Modells.....	22
Abbildung 4-6 Relaxations/Retardationszeit	23
Abbildung 4-7 Sinusförmige Dehnung	23
Abbildung 4-8 G' und G'' des Dreiparameter-Modells	25
Abbildung 4-9 J' und J'' des Dreiparameter-Modells	27
Abbildung 5-1 Relaxation über linearer und logarithmischer Zeitskala (5 Elemente)	33
Abbildung 6-1 Relaxation und Retardation	39
Abbildung 7-1 Dirac Funktionen an den Stellen v_k	47
Abbildung 10-1 kausale Funktion	55
Abbildung 10-2 Dynamische Moduli des fraktionellen Dämpfers	60
Abbildung 10-3 Dyn. Nachgiebigkeit des fraktionellen Dämpfers.....	61
Abbildung 10-4 Integrationsbereich, Vertauschen der Integrationsreihenfolge	63
Abbildung 10-5 komplexe Zahlenebene und Polardarstellung	64
Abbildung 11-1 G', G'', J', J'' Modell mit fraktionellem Element	71
Abbildung 11-2 Relaxationsspektrum des fraktionellen Dämpfers	73
Abbildung 12-1 kumulatives Spektrum einer Maxwell Kette	78
Abbildung 12-2 kumulatives Spektrum der Maxwell Kette und $h(v)$	79
Abbildung 12-3 Approximation des fraktionellen Dämpfers mit $n=3, 5, 10, 20$ Elementen... 84	
Abbildung 13-1 Verschiebungen von G und J als Resultat von Temperaturänderungen	90
Abbildung 13-2 Verschiebung G' und J' als Funktion der Temperatur.....	92
Abbildung 13-3 Erzeugung der Masterkurve und experimentelles Fenster.....	93
Abbildung 13-4 Verschiebungsfunktion	94

Beiträge zur Materialtheorie

Herausgeber: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion

Universität der Bundeswehr München

ISSN 1862-5703

In dieser Reihe sind bisher folgende Hefte erschienen:

- | | |
|------|--|
| 1/07 | RETKA, JOHANNES / HÖFER, PHILIPP
Numerische Simulation aushärtender Klebstoffe |
| 2/07 | RANZ, THOMAS
Ein feuchte- und temperaturabhängiger anisotroper Werkstoff: Holz |
| 3/07 | THURNER, FLORIAN / RANZ, THOMAS
Rheologisches Verhalten von Holz unter Biegebelastung |