

## 5. Übung

Herbsttrimester 2023

17) Seien  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$  Parameter im linearen Programm

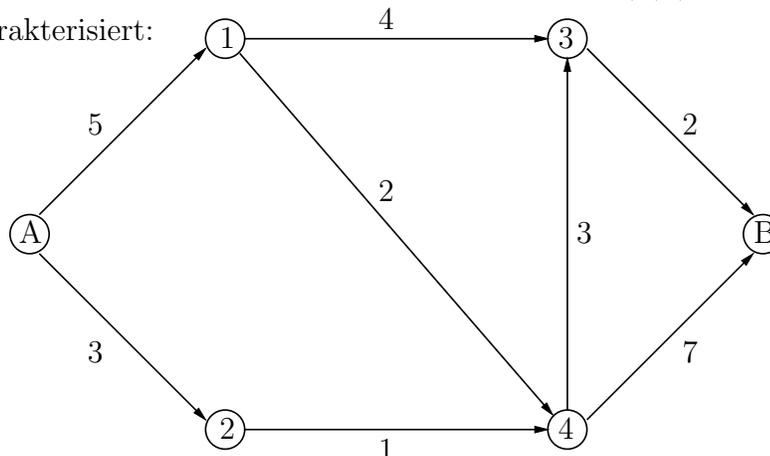
$$\begin{array}{l} \text{Minimiere} \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{u.d.N.} \quad \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 + \delta_1, \\ \quad \quad \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 + \delta_2, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

Durch das folgende Simplextableau ist eine optimale Lösung des ungestörten Problems (d.h. für  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ) gegeben:

	4	2	5	
1	2	7	1	10
3	1	4	1	6
	-3	-13	-2	-16

- (a) Formulieren Sie das duale Problem für  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  und bestimmen Sie eine duale Lösung, ohne das duale Problem explizit zu lösen.
- (b) Berechnen Sie eine optimale Lösung des gestörten Problems, wobei die Störungen  $\delta = (\delta_1, \delta_2)$  nahe genug bei  $(0, 0)$  liegen sollen.  
 Hinweise: Benutzen Sie den Ansatz  $x_B(\delta) = x_B(0) + A_B^{-1}(\delta)$  und  $x_N(\delta) = 0$ .
- (c) Skizzieren Sie die Werte von  $\delta_1$  und  $\delta_2$  aus (b), für die die Lösung, die Sie in (b) erhalten haben, optimal bleibt.

18) Ein Routenplaner steht vor dem Problem, den kürzesten Weg zwischen zwei Städten A und B zu berechnen. Dabei sei A der Startort und B der Zielort. Die möglichen Verbindungsstrecken von A nach B über Zwischenstationen 1,2,3,4 sind durch folgendes Netzwerk charakterisiert:



Die Länge des Weges zwischen zwei Stationen ist über der jeweiligen Verbindungskante eingetragen. Formulieren Sie die Aufgabe als lineares Optimierungsproblem.

19) Lösen Sie das lineare Programm

$$\text{Maximiere } x_1 + 3x_2 \text{ unter } x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + 3x_2 \leq p, x_1, x_2 \geq 0$$

grafisch in Abhängigkeit von  $p \in \mathbb{R}$  und geben Sie die Lösung(en) an. Skizzieren Sie die Maximalwertfunktion

$$w(p) := \max\{x_1 + 3x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + 3x_2 \leq p, x_1, x_2 \geq 0\}$$

für  $p \in \mathbb{R}$ .

20) Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen, dass die Zielfunktion  $f(x) = c^\top x$  und der zulässige Bereich  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$  eines linearen Programms in primaler Normalform konvex ist.