Left-Recursive Trees

```
grammar Tree_left_rec
   nonterminal  T(1), S(0);
   terminal     edge(2);
   start        S;

   S()      ::= T(x)                    [ r1 ]
   T(x)     ::= T(x) edge(x,y) T(y)     [ r2 ]
              |  /* eps */              [ r3 ]
end
```

State $q_0(a)$

$\mathsf{S}() \to \bullet\, \mathsf{T}(a)$
$\mathsf{T}(a) \to \bullet$ $[r3]$
$\mathsf{T}(a) \to \bullet\, \mathsf{T}(a)\, \mathsf{edge}(a, n_1)\, \mathsf{T}(n_1)$

$$\xrightarrow[n_0 = a]{\mathsf{T}(n_0)} q_1(n_0)$$

State $q_1(a)$

$\mathsf{T}(a) \to \mathsf{T}(a)\, \bullet\, \mathsf{edge}(a, n_1)\, \mathsf{T}(n_1)$
$\mathsf{S}() \to \mathsf{T}(a) \bullet$ $[r1]$

$$\xrightarrow[n_0 = a, n_1\uparrow]{\mathsf{edge}(n_0, n_1)} q_2(n_0, n_1)$$

State $q_2(a, b)$

$\mathsf{T}(a) \to \mathsf{T}(a)\, \mathsf{edge}(a, b)\, \bullet\, \mathsf{T}(b)$
$\mathsf{T}(b) \to \bullet$ $[r3]$
$\mathsf{T}(b) \to \bullet\, \mathsf{T}(b)\, \mathsf{edge}(b, n_1)\, \mathsf{T}(n_1)$

$$\xrightarrow[n_0 = b]{\mathsf{T}(n_0)} q_3(n_0, a)$$

State $q_3(a, b)$

$\mathsf{T}(a) \to \mathsf{T}(a)\, \bullet\, \mathsf{edge}(a, n_1)\, \mathsf{T}(n_1)$
$\mathsf{T}(b) \to \mathsf{T}(b)\, \mathsf{edge}(b, a)\, \mathsf{T}(a) \bullet$ $[r2]$

$$\xrightarrow[n_0 = a, n_1\uparrow]{\mathsf{edge}(n_0, n_1)} q_2(n_0, n_1)$$

Right-Recursive Trees

```
grammar Tree_right_rec
   nonterminal  T(1), S(0);
   terminal     edge(2);
   start        S;

   S()      ::= T(x)                    [ r1 ]
   T(x)     ::= edge(x,y) T(x) T(y)     [ r2 ]
              |  /* eps */              [ r3 ]
end
```

State $q_0(a)$

$\mathsf{S}() \to \bullet\, \mathsf{T}(a)$
$\mathsf{T}(a) \to \bullet$ $[r3]$
$\mathsf{T}(a) \to \bullet\, \mathsf{edge}(a, n_1)\, \mathsf{T}(a)\, \mathsf{T}(n_1)$

$$\xrightarrow[n_0 = a]{\mathsf{T}(n_0)} q_4(n_0)$$
$$\xrightarrow[n_0 = a, n_1\uparrow]{\mathsf{edge}(n_0, n_1)} q_1(n_0, n_1)$$

State $q_1(a, b)$

$\mathsf{T}(a) \to \mathsf{edge}(a, b)\, \bullet\, \mathsf{T}(a)\, \mathsf{T}(b)$
$\mathsf{T}(a) \to \bullet$ $[r3]$
$\mathsf{T}(a) \to \bullet\, \mathsf{edge}(a, n_1)\, \mathsf{T}(a)\, \mathsf{T}(n_1)$

$$\xrightarrow[n_0 = a]{\mathsf{T}(n_0)} q_2(n_0, b)$$
$$\xrightarrow[n_0 = a, n_1\uparrow]{\mathsf{edge}(n_0, n_1)} q_1(n_0, n_1)$$

State $q_2(a, b)$

$\mathsf{T}(a) \to \mathsf{edge}(a, b)\, \mathsf{T}(a)\, \bullet\, \mathsf{T}(b)$
$\mathsf{T}(b) \to \bullet$ $[r3]$
$\mathsf{T}(b) \to \bullet\, \mathsf{edge}(b, n_1)\, \mathsf{T}(b)\, \mathsf{T}(n_1)$

$$\xrightarrow[n_0 = b]{\mathsf{T}(n_0)} q_3(a, n_0)$$
$$\xrightarrow[n_0 = b, n_1\uparrow]{\mathsf{edge}(n_0, n_1)} q_1(n_0, n_1)$$

State $q_3(a, b)$

$\mathsf{T}(a) \to \mathsf{edge}(a, b)\, \mathsf{T}(a)\, \mathsf{T}(b) \bullet$ $[r2]$

State $q_4(a)$

$\mathsf{S}() \to \mathsf{T}(a) \bullet$ $[r1]$