Crashkurs Differenzieren

Thomas Apel

30. September 2005

1 Funktionen einer Veränderlichen

Alles ändert sich mit der Zeit: die Lage eines fallenden Steins im Raum, der Wert einer Aktie, der Blutdruck in der Ader, die Temperatur im Raum. Die *Differentialrechnung* beschäftigt sich nicht mit der Änderung an sich, sondern mit der *Rate*, mit der die Änderung vor sich geht.

Def 1 *Sei y eine Größe, die sich mit der Zeit t ändert,*

$$y = y(t),$$

dann bezeichnet man die Rate, mit der y zum Zeitpunkt t wächst, mit dem Symbol

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Der Strich bzw. das Zeichen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ist ein Symbol, das die Änderungsrate einer Größe bezeichnet. Man bezeichnet $y'(t)$ bwz. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ als Ableitung von y (nach t).

Bem 2

- Man kann natürlich auch andere Änderungsraten betrachten, z. B. bezüglich des Ortes.
- Wenn es speziell um eine Rate bezüglich der Zeit geht, schreibt man auch oft $\dot{y}$ statt y'.

Bsp 3 Ist $y(t)$ die Position des Läufers auf der 100m-Laufstrecke, dann ändert sich dessen Position um so stärker mit der Zeit, je größer die Geschwindigkeit des Läufers ist.

$y(t)$	zum Zeitpunkt t zurückgelegte Wegstrecke,
$y'(t)$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Wie bestimmt man die Geschwindigkeit? Ist die Geschwindigkeit konstant, kann man sie durch das Messen der Wegstrecke zu einem Zeitpunkt t und zu einem späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmmen:

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

Ist die Geschwindigkeit nicht konstant, erhält man mit dieser Formel nur die *Durchschnittsgeschwindigkeit* im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$.

Die *Momentangeschwindigkeit* zum Zeitpunkt t erhält man, indem man das Zeitintervall immer kleiner werden lässt, symbolisch geschrieben

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}.$$

Bsp 4 Eine Spielzeugeisenbahn beschleunigt aus dem Stand, so dass sie nach einer Zeit t eine Strecke $y = y(t)$ zurückgelegt hat, wobei

$$y = ct^2.$$

Damit gilt für die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} &= \frac{c\,(t+\Delta t)^2 - ct^2}{\Delta t} \\ &= \frac{ct^2 + 2ct\,\Delta t + c(\Delta t)^2 - ct^2}{\Delta t} = c\,(2t + \Delta t). \end{aligned}$$

Wenn wir die Zeitspanne Δt immer kleiner werden lassen, geht die Durchschnittsgeschwindigkeit $c\,(2t+\Delta t)$ gegen die Momentangeschwindigkeit $2ct$ zum Zeitpunkt t. Für die Konstante c kann man zum Beipiel $1\,\mathrm{cm/s}^2$ annehmen.

Bem 5

- Wenn sich eine Größe y mit der Zeit nur wenig vergrößert, dann ist y' klein.
- Wenn sich y stark vergrößert, dann ist y' groß.
- Wenn sich y verkleinert, dann ist y' negativ.

Satz 6 (Ableitungen wichtiger Funktionen)

$$\begin{array}{ll} y(t) = const. & y'(t) = 0 \\ y(t) = at + b & y'(t) = a \\ y(t) = t^\alpha,\ \alpha \neq 0 & y'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \\ y(t) = e^t & y'(t) = e^t \\ y(t) = \sin t & y'(t) = \cos t \\ y(t) = \cos t & y'(t) = -\sin t \\ y(t) = \ln t & y'(t) = \frac{1}{t} \end{array}$$

Satz 7 (Einfache Ableitungsregeln)

Summenregel:	$[f(t)+g(t)]' = f'(t)+g'(t)$
Faktorregel:	$[c\cdot f(t)]' = c\cdot f'(t)$
Produktregel:	$[f(t)\cdot g(t)]' = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$
Quotientenregel:	$\left[\dfrac{f(t)}{g(t)}\right]' = \dfrac{f'(t)\cdot g(t) - f(t)\cdot g'(t)}{[g(t)]^2}$
Kettenregel:	$f(g(t))' = f'(g(t))\cdot g'(t)$

Ü 8 *Man berechne die Ableitung von (a)* $f(t) = 7t^2+3t+4$, *(b)* $f(t) = \sqrt{t}$, *(c)* $h(t) = \mathrm{e}^{4t}$ *und (d)* $h(t) = t\sin t$.

Die Geschwindigkeit $v(t) = y'(t)$ ist i. Allg. auch eine zeitabhängige Größe. Die Änderungsrate $v'(t)$ der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung,

$$a(t) = v'(t) = y''(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y(t)\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y(t).$$

Def 9 *Man bezeichnet* $y''(t)$ *als die zweite Ableitung von* $y(t)$. *Rekursiv kann man höhere Ableitungen einführen.*

Bem 10

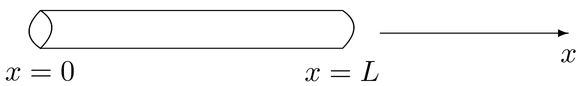
- Man kann natürlich auch zweite und höhere Ableitungen für Funktionen anderer Veränderlicher (z. B. Ort) betrachten.
- Wenn es speziell um eine Rate bezüglich der Zeit geht, schreibt man auch oft $\ddot{y}$ statt y''.

2 Funktionen von mehreren Veränderlichen

Manche Größen hängen von mehreren Variablen ab, so zum Beispiel die Raumtemperatur und der Blutdruck nicht nur von der Zeit t, sondern auch vom Ort x, an dem sie/er gemessen wird,

$$y = y(x,t).$$

Bsp 11 Die Temperatur in einem sich abkühlenden Stab



sei zwar über den Querschnitt konstant, aber nicht entlang des Stabs,

$$T = T(x,t).$$

Def 12 *Die Rate, mit der sich eine vom Ort x und der Zeit t abhängige Größe $y(x,t)$ an einem festen Ort x zeitlich ändert, wird mit*

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(x, t + \Delta t) - y(x,t)}{\Delta t}$$

bezeichnet. Hingegen ist die Rate, mit der sich die Größe $y(x,t)$ zu einem festen Zeitpunkt t bezüglich des Ortes ändert,

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x,t)}{\Delta x}.$$

Die Symbole $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial t}$ bezeichnen partielle Ableitungen.

Merke Bildet man die partielle Ableitung nach einer Variablen, werden alle anderen Variablen als konstant angesehen.

Für Größen $y(\underline{x}) = y(x_1, x_2, x_3)$, die von den drei Raumrichtungen x_1, x_2 und x_3 abhängen, kann man die drei partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial x_3}$$

bilden.

Def 13 *Der Spaltenvektor mit den partiellen Ableitungen nach allen Raumrichtungen heißt Gradient der Funktion $y(\underline{x})$ und man schreibt kurz*

$$\nabla y := \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Dabei bezeichnet das Symbol ∇ den Nabla-Operator. Der Nabla-Operator ist ein Differentialoperator. Man kann ihn formal als den Vektor

$$\nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

schreiben.