

Heft 12

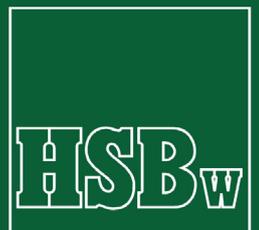
München, April 1984

PETER SCHWINTZER

Analyse geodätisch gemessener
Punktlageänderungen mit
gemischten Modellen

SCHRIFTENREIHE

Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen
Hochschule der Bundeswehr München



Heft 12

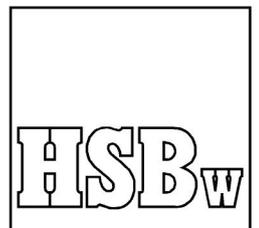
München, April 1984

PETER SCHWINTZER

Analyse geodätisch gemessener
Punktlageänderungen mit
gemischten Modellen

SCHRIFTENREIHE

Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen
Hochschule der Bundeswehr München



Der Druck dieses Heftes wurde aus Haushaltsmitteln der Hochschule der Bundeswehr München gefördert.

Verantwortlich für die Herausgabe der Schriftenreihe:

Der Prodekan des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen

Bezugsnachweis:

Studiengang Vermessungswesen
im Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen
Hochschule der Bundeswehr München
Werner-Heisenberg-Weg 39
8014 Neubiberg

ISSN 0173-1009

ANALYSE GEODÄTISCH GEMESSENER
PUNKTLAGEÄNDERUNGEN MIT GEMISCHTEN MODELLEN

von

Peter Schwintzer

Vollständiger Abdruck aus der vom Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigten Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr. rer.nat. K. Wichmann
1. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. W. Caspary
2. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. W. Welsch
3. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. E. Grafarend,
Universität Stuttgart

Die Dissertation wurde am 26.10.1983 bei der Hochschule der Bundeswehr München, D-8014 Neubiberg, Werner-Heisenberg-Weg 39, eingereicht und durch den Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen am 12.12.1983 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. <u>Einleitung</u>	5
2. <u>Lineare Modelle mit Zufallsparametern</u>	11
2.1 Modell- und Begriffsdefinitionen	11
2.2 Ableitung der Schätzfunktion nach unterschiedlichen Methoden	15
2.2.1 Ableitung der Schätzfunktionen aus dem statistischen Regressionsmodell	16
2.2.2 Ableitung der Schätzfunktionen aus dem Gauß-Markoff-Modell mit erweitertem Beobachtungsvektor	20
2.2.3 Ableitung der Schätzfunktionen aus dem Gauß-Markoff-Modell mit geänderter Gewichtsmatrix der Beobachtungen	22
2.3 Behandlung von Rangdefekten	23
2.3.1 Spaltensinguläre Koeffizientenmatrix der festen Parameter	23
2.3.2 Singuläritäten im stochastischen Teil des Modells	25
2.4 Explizite Ableitung der Schätzfunktionen unter Einschluß einer möglicherweise singulären Kofaktorenmatrix der Beobachtungen	33
2.4.1 Parameterschätzung	34
2.4.2 Genauigkeitsschätzung	38
2.4.3 Geometrische Deutung der Parameterschätzung im gemischten Modell	40
2.5 Quadratische Formen im gemischten Modell	42
2.5.1 Ableitung der formelmäßigen Zusammenhänge	43
2.5.2 Erwartungswerte und Verteilungen	46
2.5.3 Quadratische Formen bei nichtlinearer Trendfunktion	51

	Seite
3. <u>Analyse von Punktlageänderungen zwischen zwei Beobachtungsepochen</u>	53
3.1 Das gemischte Analysemodell mit Trend- und Zufallsanteil	54
3.1.1 Ausgleichungsansatz und Modellvoraussetzungen	56
3.1.2 Gewichtung der Zufallsparameter	60
3.1.2.1 Die Struktur der Varianz-Kovarianz-Matrix für die Zufallsparameter	61
3.1.2.2 Einfluß von Gewichtsänderungen der Zufallsparameter auf die Ausgleichung	67
3.2 Modellüberprüfung und Modellanpassung	72
3.2.1 Globaltest der Punktlageänderungen und der Verbesserungen im festen Gauß-Markoff-Modell	74
3.2.2 Schätzung der endgültigen Varianz-Kovarianz-Matrix für die Zufallsparameter und Lokalisierung von Einzelpunktbewegungen	76
3.2.3 Globaltest der Zufallsparameter auf Modellrelevanz	86
3.2.4 Signifikanztests der Trendparameter durch Cholesky-Zerlegung mit spezieller Pivotsuche	86
3.3 Der Sonderfall einer Punktanalyse ohne Trendfunktion im Vergleich mit der Methode der Klaffungszerlegung	93
4. <u>Erweiterung der Analyse von Punktlageänderungen auf die Bearbeitung mehrerer Epochen</u>	97
4.1 Das gemischte Modell für die Mehrepochenanalyse	97
4.1.1 Ausgleichungsansatz und Modellvoraussetzungen	97
4.1.2 Gewichtung der Zufallsparameter	106
4.2 Modellüberprüfung und Modellanpassung bei einer gleichzeitigen Auswertung aller Beobachtungsepochen	107
4.2.1 Globaltest der Punktbewegungen und der Verbesserungen im festen Gauß-Markoff-Modell	107

	Seite	
4.2.2	Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit für die Zufallsparameter und Lokalisierung von abweichenden Beobachtungsepochen	109
4.2.3	Signifikanztests der Trendparameter	113
4.3	Anwendung der sequentiellen Parameterschätzung auf die Mehrepochenanalyse	113
4.3.1	Vorgehensweise	113
4.3.2	Berechnungsformeln für die Parameter- und die Genauigkeitsschätzung	115
4.3.3	Ermittlung von Modellabweichungen bei Hinzunahme einer neuen Beobachtungsepoche	118
4.3.4	Abrißartiger Vergleich mit der diskreten Kalman-Filterung	118
4.4	Der Sonderfall einer Mehrepochenanalyse ohne Trendfunktion	120
5.	<u>Numerische Beispiele</u>	121
5.1	Zweiepochenanalyse	121
5.1.1	Simuliertes zweidimensionales Netz	121
5.1.2	Dreidimensional gemessenes Staudammüberwachungsnetz	130
5.2	Mehrepochenanalyse	141
6.	<u>Zusammenfassung</u>	150
	Literaturverzeichnis	153
	Lebenslauf	157

1. Einleitung

Durch die Entwicklung neuer und genauerer Beobachtungsinstrumente sind immer kleinere Objektbewegungen und Deformationen meßbar geworden. Dies hat in Verbindung mit den Möglichkeiten der elektronischen Datenverarbeitung und unter Einschluß statistischer Betrachtungsweisen zu neuen ausgefeilten, aber rechenaufwendigen Auswertestrategien geführt. Die Fülle von Publikationen, die zu diesem Thema in den letzten Jahren erschienen sind, zeugt von dem Aufschwung, den dieser Zweig der Geodäsie genommen hat.

Die vorliegende Arbeit ist ein weiterer Beitrag zu diesem Aufgabengebiet. Sie befaßt sich mit der Analyse von geodätischen Deformationsnetzen, die neben elektrischen und elektronischen in situ Messungen die wichtigste Grundlage für die Analyse und Interpretation von geometrischen Objektdeformationen darstellt.

Im folgenden wird versucht, die vorliegende Arbeit in den angesprochenen Themenkomplex einzuordnen. Dabei wird auf Literaturhinweise verzichtet, für die auf die umfassende Literaturzusammenstellung bei [WELSCH 1981] verwiesen sei.

Das zu untersuchende Objekt wird in einzelne repräsentative Punkte diskretisiert, die das zu beobachtende ein-, zwei- oder dreidimensionale Netz bilden. Die Objektpunkte können mit außerhalb liegenden Referenzpunkten verbunden sein. Durch wiederholtes Beobachten der Netzelemente in bestimmten zeitlichen Abständen (Beobachtungsepochen) können nach einer Generalisierung der Beobachtungsdifferenzen oder der daraus abgeleiteten Koordinatenunterschiede Rückschlüsse auf das Bewegungsverhalten des Objekts gezogen werden. Beispiele für Aufgabenstellungen dieser Art sind das Überwachen von

- rezenten Krustenbewegungen
- Bauwerksdeformationen (Staudamm, Turm, Brücke, Gebäude)
- Bodensenkungen
- Hangrutschungen
- Gletscherbewegungen.

Die Optimierung der Netzgestalt, des Beobachtungsplanes und der Beobachtungsintervalle für die Aufgabenstellung ist von entscheidender Bedeutung, jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit, die sich auf die Auswertung der aus

dem Beobachtungsmaterial berechneten Punktlageänderungen konzentriert.

Änderungen in der Netzgeometrie treten als Folge von Lage- und Formveränderungen des Objekts auf. Dabei sind Kombinationen der folgenden Bewegungsarten denkbar:

- reine Lageänderung (Drehung und Verschiebung des Körpers als Ganzes ohne Formveränderung)

Solche Bewegungen können nur erkannt werden, wenn ein von den Objektbewegungen unabhängiges festes Referenzsystem gegeben ist. Eine reine Lageänderung läßt sich durch die Parameter einer Ähnlichkeitstransformation beschreiben. Die Netzgeometrie der Objektpunkte bleibt unverändert.

- homogene Deformation (Volumenänderung des Körpers, affine Verzerrungen)

Die homogene Deformation bewirkt eine Formänderung des Körpers, wobei die Deformation eines jeden Volumenelements im gesamten Körper nach Betrag und Richtung konstant ist. Die relative Lage der Objektpunkte zueinander ändert sich (innere Bewegungen), so daß homogene Deformationen auch ohne einen stabil bleibenden Festpunktrahmen, wie es für geotektonische Aufgaben typisch ist, gemessen werden können. Diese Art von Deformationen lassen sich durch die Parameter einer Affintransformation beschreiben.

- inhomogene Deformation

Die Deformation des Körpers ist abhängig vom Ort. Auch diese inneren Bewegungen sind ohne festes Referenzpunktsystem meßbar. Eine Beschreibung von inhomogenen Deformationen durch eine generalisierende Funktion ist jedoch ohne Kenntnis aller Einflußparameter nur durch Approximationslösungen zum Beispiel mit einem Regressionsansatz höherer Ordnung möglich.

- Einzelpunktbewegungen

Einzelpunktbewegungen sind unregelmäßige, auf die unmittelbare Umgebung des Punktes begrenzte lokale inhomogene Deformationen, die sich einer Beschreibung durch einen funktionalen Zusammenhang entziehen. Sie überlagern als stochastischer Störprozeß (innere Punktunruhe) das Rauschen des Meß-

prozesses. Große Einzelpunktbewegungen sind solche, deren Erwartungswerte sich signifikant von Null unterscheiden und die durch geeignete statistische Testverfahren als deterministische Größen lokalisiert werden können.

Bei der Auswertung von Deformationsmessungen unterscheidet man zwischen der Zweiepochenanalyse und der Mehrepochenanalyse. Bei der Zweiepochenanalyse werden zwei Beobachtungsepochen ausgewertet, wobei die rein örtliche Veränderung des Objekts als lineare Bewegung zwischen den beiden Beobachtungzeitpunkten beschrieben wird. Da die Zeitkomponente bei solchen Lösungen keine Rolle spielt, handelt es sich um eine rein statische Modellauffassung.

Unter einer Mehrepochenanalyse versteht man die gleichzeitige Bearbeitung mehrerer Beobachtungsepochen. Diese Betrachtungsweise erlaubt eine Modellierung des Bewegungsablaufs in der Zeit. Ist das Ziel lediglich die rein geometrische Beschreibung der Objektbewegung in Abhängigkeit von der Zeit, so spricht man von einem kinematischen Modell. Werden in den Modellansatz darüberhinaus auch physikalische Einflußparameter, die als auslösende Kräfte für die Bewegungen verantwortlich sind, berücksichtigt, so handelt es sich um ein dynamisches Modell, das neben einer bloßen Beschreibung der Objektdeformation auch eine Interpretation der kausalen Zusammenhänge zuläßt.

Bei Mehrepochenanalysen ergeben sich für die Auswertung und Modellbildung Vorteile, wenn in jeder Epoche nach Art und Genauigkeit die gleichen Beobachtungen gemacht werden (univariates Design). Da diese Voraussetzungen wegen der Möglichkeit von Punktzerstörungen, von Instrumentenwechsel und von unterschiedlichen Beobachtungsbedingungen nur in seltenen Fällen vorliegen und dann höchstens über eine geringe Epochenanzahl gesichert sind, sind Auswertemodelle, die unterschiedliche Punktzahl und eine variable Beobachtungsanordnung und Genauigkeit in jeder Epoche zulassen, realitätsnäher und praktikabler.

Ziel dieser Arbeit ist es, die dargestellten Bewegungsarten in einem gemeinsamen gemischten Modellansatz zu berücksichtigen. Dabei treten neben den deterministischen festen Parametern, die die übergeordneten systematischen Bewegungen und Deformationen beschreiben, Zufallsparameter auf, die die unregelmäßigen Bewegungsanteile wie innere Punktunruhe und Modellrestfehler auffangen. Es werden in Verbindung mit statistischen Testverfahren

Lösungswege beschrieben, wie in dem Modell simultan die Lokalisierung grosser Einzelpunktbewegungen und die Schätzung der deterministischen und der zufälligen Parameter vorgenommen werden können.

Die Vorgehensweise bei der Deformationsanalyse, die in dieser Arbeit zugrunde gelegt wird, besteht darin, daß das Problem in zwei oder mehr Schritten bearbeitet wird. Der erste Schritt, die Ausgleichungen der Netzbeobachtungen, wird hier nicht näher betrachtet. In den sich anschließenden Schritten werden die Ausgleichungsergebnisse, z.B. die Punktkoordinaten und deren Kofaktorenmatrizen, in Folgeausgleichungen weiterverarbeitet. Da dabei gemischte Modelle verwendet werden, werden zunächst in allgemeiner Form deren grundlegende Eigenschaften und die Schätzfunktionen für die Modellparameter abgeleitet.

Im Anschluß daran wird das Ausgangsmodell für eine Zweiepochenanalyse formuliert, und es werden die möglichen sukzessiv aufeinanderfolgenden Bearbeitungsstufen bei der Modellanpassung systematisch beschrieben.

Darauf aufbauend schließt sich eine Erweiterung zur gemeinsamen Bearbeitung mehrerer Epochen an. Neben der Mehrepochenanalyse in einem Guß wird die stufenweise Vorgehensweise mittels sequentieller Parameterschätzung behandelt.

Die dargestellten Auswertestrategien werden an Anwendungsbeispielen sowohl für die Zweiepochenanalyse als auch für ein kinematisches Mehrepochenmodell vorgeführt.

2. Lineare Modelle mit Zufallsparametern

Für die Analyse und Generalisierung gemessener Punktverschiebungen werden in dieser Arbeit Modelle angewendet, die sich von dem gewöhnlichen Gauß-Markoff-Modell durch einen zusätzlich auftretenden Vektor von Zufallsparametern unterscheiden und als gemischte Modelle bezeichnet werden. Die allgemeinen Eigenschaften solcher Modelle und die Lösungswege, um zu Schätzfunktionen für die unbekanntenen Größen zu gelangen, werden in diesem Kapitel aufgezeigt und zusammengestellt.

Zunächst werden die grundlegenden Begriffe, auf die im Verlauf der Arbeit immer wieder Bezug genommen wird, erläutert und die Unterschiede zu dem gewöhnlichen Gauß-Markoff-Modell und zu dem unter der Bezeichnung Kollokation bekannten Verfahren deutlich gemacht. Es schließt sich eine Gegenüberstellung der verschiedenen Lösungsansätze für das gemischte Modell an, um einen Einblick in den Charakter der auftretenden Größen zu geben und um eine Grundlage für die später folgenden Ableitungen zu legen.

Einen breiten Raum nimmt anschließend die Behandlung von Rangdefekten ein. Das ist von besonderer Wichtigkeit, da bei Deformationsanalysen häufig singuläre Matrizen auftreten, insbesondere, wenn mit Koordinaten operiert wird und kein festes Referenzsystem gegeben ist. Die sich daraus ergebenden Konsequenzen für eine Folgeausgleichung mit gemischten Modellen werden eingehend analysiert und bei der expliziten Ableitung der Schätzfunktionen für die Modellparameter berücksichtigt.

Anschließend erfolgt eine Zusammenstellung der für die statistischen Testverfahren benötigten quadratischen Formen einschließlich ihrer algebraischen Zusammenhänge, ihrer Erwartungswerte und Verteilungen.

2.1 Modell- und Begriffsdefinitionen

Als Gauß-Markoff-Modell wird ein lineares Modell der Form

$$y = Ax + e \tag{2.1}$$

mit folgenden statistischen Eigenschaften

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{y}) &= \mathbf{A} \mathbf{x} \\
\text{Var}(\mathbf{e}) = \text{Var}(\mathbf{y}) &= \boldsymbol{\Sigma}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} \\
&= \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee} \\
E(\mathbf{e}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

bezeichnet. Hierin bedeuten

- \mathbf{y} einen $n \times 1$ Vektor von Beobachtungen, der als Stichprobe aus einer Grundgesamtheit von Zufallsvektoren aufgefaßt werden kann,
- \mathbf{A} eine bekannte $n \times u$ Matrix fester Koeffizienten mit $u < n$,
- \mathbf{x} einen $u \times 1$ Vektor der unbekanntes aber konstanten, festen Parameter und
- \mathbf{e} einen $n \times 1$ Vektor der Fehler der Beobachtungen \mathbf{y} mit $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{E}(\mathbf{y})$.

Aufgrund der statistischen Eigenschaften, \mathbf{y} stochastisch, \mathbf{A} und \mathbf{x} nicht stochastisch (fix), handelt es sich um ein Modell vom Typ_SFF im Sinne der Klassifikation nach GRAFAREND (1978).

Ein solches Modell, in dem neben den Zufallsvektoren \mathbf{y} und \mathbf{e} nur feste Parameter auftreten, wird in der englischsprachigen Statistikk-literatur als fixed model und die Parameter werden als fixed effects bezeichnet [SEARLE 1971, S. 377].

Ist in dem Gauß-Markoff-Modell der Unbekanntesvektor ein Zufallsvektor (random effects), so erhält man das Gauß-Markoff-Modell mit Zufallsparametern (random model)

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad , \tag{2.3}$$

das auch als Regressionsmodell bezeichnet wird und durch die folgenden Aussagen charakterisiert ist [RAO 1973, S. 234; KOCH 1977; SEARLE 1978]:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{z}) &= \boldsymbol{\mu} & \text{Var}(\mathbf{z}) &= \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{zz} \\
& & \text{Kov}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) &= \mathbf{0} \\
E(\mathbf{e}) &= \mathbf{0} & \text{Var}(\mathbf{e}) &= \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee} \\
& & &= \text{Var}(\mathbf{y} | \mathbf{z}) \\
E(\mathbf{y}) &= \mathbf{B} \boldsymbol{\mu} & \text{Var}(\mathbf{y}) &= \sigma_0^2 (\mathbf{Q}_{ee} + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

Der Fehlervektor e ist jetzt definiert durch

$$e = y - E(y|z) . \quad (2.5)$$

B ist die $n \times p$ Matrix bekannter fester Koeffizienten und z der $p \times 1$ Vektor der Zufallsparameter, dessen Erwartungswert μ als bekannt vorausgesetzt wird. $E(y|z)$ und $\text{Var}(y|z)$ beziehen sich auf die bedingte Verteilung von y bei gegebenem z .

Ist der Vektor μ der Erwartungswerte der Zufallsparameter unbekannt, so sind die Schätzfunktionen für den Vektor z und für die Schätzvarianz, abgeleitet nach der Methode der besten linearen erwartungstreuen Schätzung, identisch mit den Resultaten, die aus dem Gauß-Markoff-Modell mit z als festem Parametervektor gewonnen werden.

Ein solches Modell mit y stochastisch, B nicht stochastisch und z stochastisch ist ein Modell vom Typ SFS [GRAFAREND 1978].

Die Kombination der beiden Ansätze führt zu einem gemischten Modell (mixed model, mixed SFF-SFS type), in dem sowohl feste Parameter x_i als auch Zufallsparameter z_i auftreten [HARVILLE 1976a]

$$y = Ax + Bz + e . \quad (2.6)$$

Es gelten die gleichen wie für das Gauß-Markoff-Modell mit Zufallsparametern getroffenen Vereinbarungen (2.4). Lediglich für die Erwartungswerte der Beobachtungen ist

$$E(y) = Ax + B\mu \quad (2.7)$$

zu setzen.

Läßt man in (2.6) als Zufallsvektor z einen Vektor mit theoretisch unendlich vielen Komponenten zu, die sämtlich den bekannten Erwartungswert Null haben, und entsprechend eine Koeffizientenmatrix B der Ordnung $n \times \infty$, so stellt (2.6) das allgemeine Modell der Kollokation dar, wie es z.B. bei MORITZ (1973b) oder RUMMEL (1976) angegeben wird. Der systematische Anteil Ax wird als Trend und der zufällige Fehlerterm e wird als Meßrauschen oder Noise bezeichnet.

Mit der Substitution

$$\mathbf{s}' = \mathbf{B} \mathbf{z} \quad , \quad \mathbf{s} = \mathbf{z} \quad (2.8)$$

läßt sich das Kollokationsmodell in der gewohnten Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{s}' + \mathbf{0} \mathbf{s} + \mathbf{e} \quad (2.9)$$

schreiben mit \mathbf{s}' als $n \times 1$ Vektor der Signale an den Messungspunkten und \mathbf{s} als $\infty \times n$ Vektor der Signale an beliebig vielen anderen Punkten (Berechnungspunkte). Aus (2.8) liest man die Varianz-Kovarianzbeziehungen ab:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{s}) &= \Sigma_{ss} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{zz} \\ \text{Var}(\mathbf{s}') &= \Sigma_{s's'} = \sigma_0^2 \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\text{Kov}(\mathbf{s}', \mathbf{s}) = \Sigma_{s's} = \sigma_0^2 \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \quad (2.10)$$

Die unendlich dimensionierten Matrixausdrücke müssen durch analytische Funktionen ersetzt werden, um die finite Matrix $\Sigma_{s's'}$ berechnen zu können. Die Schätzung der Signale an den Berechnungspunkten wird als Prädiktion bezeichnet, die nur möglich ist, wenn die Punkte durch Kovarianzen $\Sigma_{s's}$ mit den Messungspunkten verbunden sind.

Obwohl die Einstufung des Signals als stochastisch und damit die Schätzfunktion zumindest bei Anwendungen in der Physikalischen Geodäsie ein noch offenes Problem ist [DERMANIS 1979], wird hier unter Kollokation die Kombination von Trendbestimmung und Prädiktion verstanden mit dem Signalvektor als einem Zufallsvektor. Da dann die Vektoren \mathbf{s}' und \mathbf{e} statistisch in ähnlicher Weise interpretierbar sind, nennt DERMANIS (1979) die Signale in diesem Fall 'observation like'.

Wendet man das Modell (2.9) in der Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{s}' + \mathbf{e} \quad (2.11)$$

an, d.h. ist man an einer Prädiktion nicht interessiert, so spricht man von Trendbestimmung (Schätzung der festen Parameter x_i) und Filterung (bestmögliche Beseitigung der Rauschanteile \mathbf{e} aus dem Beobachtungsvektor). Dieser Fall entspricht dem gemischten Modell (2.6) mit der Koeffizientenmatrix \mathbf{B} als $n \times n$ Einheitsmatrix \mathcal{E}_n und

$$E\{z\} = E\{s'\} = \mu = \mathbf{0} . \quad (2.12)$$

Im Unterschied zum Kollokationsmodell (2.9) können jetzt Diagonalmatrizen für die Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma_{s's'}$ der Zufallsparameter zugelassen werden. Eine Prädiktion von Werten ist dann jedoch a priori ausgeschlossen.

Das gemischte Modell in der Darstellung (2.6) läßt sich auch als Sonderfall eines allgemeinen Varianz-Kovarianzkomponentenmodells [SCHAFFRIN 1983] auffassen, das durch die folgenden beiden Momente beschrieben wird:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}) &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} E(\mathbf{z}) \\ D(\mathbf{y}) &= \Sigma_{ee} + \mathbf{B} \Sigma_{zz} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \Sigma_{ze} + \Sigma_{ze}^T \mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit z.B. $\Sigma_{ee} = \mathbf{Q}_{ee} \sigma_e^2$, $\Sigma_{zz} = \mathbf{Q}_{zz} \sigma_z^2$, $\Sigma_{ze} = \mathbf{0}$

Die zu schätzenden Unbekannten in den Momenten erster und zweiter Ordnung lauten, wenn $E(\mathbf{z})$ als bekannt vorausgesetzt wird:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \sigma_e^2 \\ \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Neben dem Parametervektor \mathbf{x} treten die beiden Varianzkomponenten σ_e^2 und σ_z^2 auf. Obwohl in den nächsten Kapiteln auch die Varianzkomponentenschätzung zur Anwendung kommt, wird bei den Ableitungen in diesem Kapitel aus Vereinfachungsgründen davon ausgegangen, daß $\Sigma_{ee} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee}$ und $\Sigma_{zz} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{zz}$ zumindest bis auf einen gemeinsamen Faktor σ_0^2 gegeben sind.

2.2 Ableitung der Schätzfunktionen nach unterschiedlichen Methoden

In den folgenden Ableitungen werden unterschiedliche Schätzmethoden auf das gemischte Modell angewendet und die Lösungsformeln, die für alle Methoden gültig sind, auf verschiedenen Wegen gewonnen. Zunächst wird der Übersichtlichkeit wegen vorausgesetzt, daß es sich um reguläre Problemstellungen handelt, das heißt, daß alle auftretenden Inversen eindeutig definiert sein sollen. Lösungsstrategien bei Rangdefekten im funktionalen oder im stochastischen Modell werden im Kapitel 2.3 erläutert.

2.2.1 Ableitung der Schätzfunktionen aus dem statistischen Regressionsmodell

Für das im Kapitel 2.1 definierte Regressionsmodell

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (2.3)$$

wird nun unterstellt, daß die bekannten Erwartungswerte der Zufallsparameter gleich Null sind,

$$E(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} . \quad (2.15)$$

Das bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man den allgemeinen Fall durch Abspalten des Konstantenvektors $\mathbf{B} \boldsymbol{\mu}$ vom Beobachtungsvektor leicht auf den speziellen Fall zurückführen kann; denn

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{e} \quad [E(\bar{\mathbf{z}}) = \boldsymbol{\mu}] \quad (2.16a)$$

ist äquivalent mit

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad [\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{B} \boldsymbol{\mu} , E(\mathbf{z}) = \mathbf{0}] . \quad (2.16b)$$

Aus den mit (2.4) getroffenen Verteilungsaussagen folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{y}) &= \sigma_0^2 (\mathbf{Q}_{ee} + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} \\ \text{Kov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sigma_0^2 \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wir konstruieren unter diesen Voraussetzungen eine lineare, inhomogene Schätzfunktion für den Zufallsvektor ,

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{a} + \mathbf{L}^T \mathbf{y} . \quad (2.18)$$

Der Schätzer soll erwartungstreu sein:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}} &= \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{L}}^T \mathbf{y} \\ E(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) &= \mathbf{0} \quad \text{für alle } \bar{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aus (2.19) folgt mit $E(\mathbf{y}) = E(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{L}}^T \mathbf{y}) &= E(\mathbf{z}) - \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{L}}^T E(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$\tilde{\mathbf{L}}$ beliebig.

Von den erwartungstreuen Schätzern wird der beste Schätzer im Sinne minimaler Schätzvarianz gesucht

$$\text{Var}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) = \text{Min} . \quad (2.21)$$

$$\text{Var}(\mathbf{z} - \tilde{\mathbf{L}}^T \mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{L}}^T \text{Var}(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{L}} + \text{Var}(\mathbf{z}) - 2 \tilde{\mathbf{L}}^T \text{Kov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{L}})$$

$$\frac{d\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{L}})}{d\tilde{\mathbf{L}}} = 2 \text{Var}(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{L}} - 2 \text{Kov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathcal{F}'(\tilde{\mathbf{L}}) \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{L}})}{d\tilde{\mathbf{L}}^2} = 2 \text{Var}(\mathbf{y}) = \mathcal{F}''(\tilde{\mathbf{L}}) .$$

Die Bedingungen für das Minimum $\mathcal{F}'(\hat{\mathbf{L}}) = \mathbf{0}$ und $\det[\mathcal{F}''(\hat{\mathbf{L}})] \geq 0$ sind für

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} &= [\text{Var}(\mathbf{y})]^{-1} \text{Kov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{Q}_{ee} + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \end{aligned} \quad (2.23)$$

erfüllt, so daß für den besten von allen Schätzern $\hat{\mathbf{z}}$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{L}}^T \mathbf{y} = \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T (\mathbf{Q}_{ee} + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{y} \\ &= \text{Kov}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \cdot [\text{Var}(\mathbf{y})]^{-1} \mathbf{y} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Als Varianz der Schätzung findet man

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) &= \sigma_0^2 \left[\mathbf{Q}_{zz} - \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T (\mathbf{Q}_{ee} + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{zz} \right] \\ &= \text{Var}(\mathbf{z}) - \text{Kov}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) [\text{Var}(\mathbf{y})]^{-1} \text{Kov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Aufschluß über die statistischen Eigenschaften der Schätzer erhält man durch die Betrachtung der bedingten Normalverteilung von $\mathbf{z} | \mathbf{y}$. Falls \mathbf{z} und \mathbf{e} multivariat normalverteilt sind, besitzen \mathbf{y} und \mathbf{z} eine gemeinsame multivariate Normalverteilung:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \sim N \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top & | & \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \\ \hline \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top & | & \mathcal{Q}_{zz} \end{pmatrix} \right\} \quad (2.26)$$

Für die bedingte Verteilung von \mathbf{z} bei vorgegebenem Vektor \mathbf{y} gilt dann [SEARLE 1971]

$$E(\mathbf{z}|\mathbf{y}) = \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top)^{-1} \mathbf{y} \quad (2.27)$$

$$\text{und } \text{Var}(\mathbf{z}|\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \left[\mathcal{Q}_{zz} - \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top)^{-1} \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \right]. \quad (2.28)$$

Der Vergleich mit (2.24) zeigt, daß der Schätzer $\hat{\mathbf{z}}$ für normalverteilte Größen mit dem Erwartungswert identisch ist, der zur bedingten Verteilung von \mathbf{z} in bezug auf eine Realisation von \mathbf{y} gehört

$$\hat{\mathbf{z}} = E(\mathbf{z}|\mathbf{y}), \quad (2.29)$$

und die Schätzvarianz entspricht der Varianz des bedingten Zufallsvektors $\mathbf{z}|\mathbf{y}$

$$\text{Var}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) = \text{Var}(\mathbf{z}|\mathbf{y}). \quad (2.30)$$

Es existiert damit die Darstellung

$$\mathbf{z}|\mathbf{y} \sim N\{\hat{\mathbf{z}}, \text{Var}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})\}. \quad (2.31)$$

Die Varianz des geschätzten Parametervektors $\hat{\mathbf{z}}$ folgt aus der Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (2.24):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\mathbf{z}}) &= \hat{\mathbf{L}}^\top \text{Var}(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{L}} \\ &= \sigma_0^2 \left[\mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top)^{-1} \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \right] \\ &= \text{Var}(\mathbf{z}) - \text{Var}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Für den Erwartungswert von $\hat{\mathbf{z}}$ gilt wegen der Erwartungstreue

$$E(\hat{\mathbf{z}}) = E(\hat{\mathbf{L}}^\top \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

In dem gemischten Modell (2.6)

$$\mathbf{y} = \mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{z} + \mathbf{e}$$

lauten die besten linearen erwartungstreuen Schätzer für den festen Parametervektor x und den Zufallsvektor z [SEARLE 1971, S. 459; HARVILLE 1976a]:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \left[\mathcal{A}^T (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T)^{-1} \mathcal{A} \right]^{-1} \mathcal{A}^T (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T)^{-1} \mathbf{y} \\ &= (\mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{y}\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\text{und } \hat{z} &= \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{A} \hat{x}) \\ &= \text{Kov}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) [\text{Var}(\mathbf{y})]^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{A} \hat{x})\end{aligned}\tag{2.35}$$

Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf Gleichung (2.34) liefert

$$\text{Var}(\hat{x}) = \sigma_0^2 (\mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{A})^{-1} = \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} .\tag{2.36}$$

Setzt man (2.34) in (2.35) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} [\mathbf{E} - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1}] \mathbf{y} \\ &= \mathcal{F} \mathbf{y}\end{aligned}\tag{2.37}$$

und daraus

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{z}) &= \sigma_0^2 \mathcal{F} \mathcal{Q}_{yy} \mathcal{F}^T \\ &= \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} [\mathbf{E} - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1}] \mathcal{Q}_{yy} [\mathbf{E} - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1}] \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \\ &= \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T \left(\mathcal{Q}_{yy}^{-1} - \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \right) \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} .\end{aligned}\tag{2.38}$$

Ferner ergibt sich aus $\hat{z} = \mathcal{F} \mathbf{y}$ die Kovarianz von \hat{z} und \mathbf{z} mit

$$\begin{aligned}\text{Kov}(\hat{z}, \mathbf{z}) &= \mathcal{F} \cdot \text{Kov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} [\mathbf{E} - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1}] \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \\ &= \text{Var}(\mathbf{z})\end{aligned}\tag{2.39}$$

und damit die Schätzvarianz zu

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{z} - \hat{z}) &= \text{Var}(\mathbf{z}) + \text{Var}(\hat{z}) - 2 \text{Kov}(\hat{z}, \mathbf{z}) \\ &= \text{Var}(\mathbf{z}) - \text{Var}(\hat{z}) \\ &= \sigma_0^2 \left[\mathcal{Q}_{zz} - \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^T \left(\mathcal{Q}_{yy}^{-1} - \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \right) \mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \right] .\end{aligned}\tag{2.40}$$

Entsprechend den Überlegungen für das Regressionsmodell gilt, wenn e und z multivariat normalverteilte Größen sind, für den bedingten Erwartungswert von z bei gegebener Stichprobe y

$$\begin{aligned} E(z|y) &= \text{Kov}(z, y) \cdot [\text{Var}(y)]^{-1} [y - E(y)] \\ &= Q_{zz} B^T (Q_{ee} + B Q_{zz} B^T)^{-1} (y - Ax) . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für den unbekanntem Erwartungswert von y liegt die Schätzung $A\hat{x}$ vor.

Der Vergleich von Formel (2.41) mit Formel (2.35) zeigt, daß man den Schätzer \hat{z} , wenn Normalverteilung gegeben ist, als Schätzer für den bedingten Erwartungswert von z in bezug auf y interpretieren kann

$$\hat{z} = E(\widehat{z|y}) , \quad (2.42)$$

\hat{z} ist in diesem Fall auch die Maximum-Likelihood-Lösung [SEARLE 1971, S. 461]. Bei HARVILLE (1976a) findet man die zu (2.29) und (2.30) äquivalenten Darstellungen

$$\hat{z} = E[z|(y - A\hat{x})] \quad \text{und} \quad \text{Var}(z - \hat{z}) = \text{Var}[z|(y - A\hat{x})] . \quad (2.43)$$

Ein erwartungstreuer (siehe Kapitel 2.5.2) Schätzer für die Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2 ist im gemischten Modell durch

$$s_0^2 = (y - A\hat{x})^T (Q_{ee} + B Q_{zz} B^T)^{-1} (y - A\hat{x}) / (n - u) \quad (2.44)$$

gegeben [HARVILLE 1976b].

2.2.2 Ableitung der Schätzfunktionen aus dem Gauß-Markoff-Modell mit erweitertem Beobachtungsvektor

Schreibt man das gemischte Modell $y = Ax + Bz + e$ in der Form

$$y = Ax + B(O_z + z) + e \quad (2.45)$$

mit dem $p \times 1$ Nullvektor O_z als Vektor von Pseudobeobachtungen für den Zufallsvektor z , so stellt (2.45) das Gauß-Helmert-Modell dar. Die Ableitung der Schätzfunktion ausgehend von diesem Ansatz findet man hauptsächlich bei Kollokationsproblemen [MORITZ 1972, WOLF 1977a]. Für das stochastische Modell gilt in diesem Fall

$$\text{Var} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_z \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz} \end{pmatrix} . \quad (2.46)$$

Substituiert man in dem Gauß-Helmert-Modell (2.45)

$$\mathbf{0}_z + \mathbf{z} = \mathbf{s} \quad (2.47)$$

und fügt die Substitutionsgleichung als System von Beobachtungsgleichungen für den Pseudobeobachtungsvektor $\mathbf{0}_z$ an das Modell an, so erhält man unmittelbar das erweiterte Gauß-Markoff-Modell

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{s} + \mathbf{e} \\ \mathbf{0}_z &= \mathbf{s} - \mathbf{z} , \end{aligned} \quad \text{Var} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_z \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

in dem der Vektor \mathbf{s} nun formal wie ein fester Parametervektor behandelt wird [$\text{Var}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$]. Nach Übergang auf die Schätzgrößen gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathcal{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{B} \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{v} , & \mathcal{P}_{yy} &= \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \\ \mathbf{0}_z &= \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{z}} , & \mathcal{P}_{0_z 0_z} &= \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

oder zusammengefaßt

$$\overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathcal{A}} \widehat{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{v}} , \quad \mathcal{P}_{\overline{\mathbf{y}}\overline{\mathbf{y}}} \quad (2.50)$$

mit $\overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathbf{0} & E \end{pmatrix}$, $\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$ und $\mathcal{P}_{\overline{\mathbf{y}}\overline{\mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix}$.

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate

$$\overline{\mathbf{v}}^T \mathcal{P}_{\overline{\mathbf{y}}\overline{\mathbf{y}}} \overline{\mathbf{v}} = \text{Min} \quad (2.51)$$

auf das Modell führt zu mit den bisherigen Ausdrücken übereinstimmenden Schätzfunktionen für $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}, \text{Var}(\hat{\mathbf{x}})$ und $\text{Var}(\hat{\mathbf{z}})$. Die aus der Ausgleichung fließende Kofaktorenmatrix für den Parametervektor $\hat{\mathbf{s}}$ kann unmittelbar zur Berechnung der Schätzvarianz herangezogen werden

$$\text{Var}(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) = \text{Var}(\mathbf{O}_z + \hat{\mathbf{z}}) = \text{Var}(\hat{\mathbf{z}}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\text{SS}} . \quad (2.52)$$

Der a posteriori Schätzer für die Varianz der Gewichtseinheit lautet

$$s_0^2 = \frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{v}}}{n - u} = \frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{Q}_{\text{ee}}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^\top \mathbf{Q}_{\text{zz}}^{-1} \hat{\mathbf{z}}}{n - u} \quad (2.53)$$

und stimmt mit (2.44) überein, wie im Kapitel 2.4.2 gezeigt werden wird. Diese Modellformulierung findet man zum Beispiel bei SEARLE (1971, S. 459), EBNER (1978) und STRANG VAN HEES (1981).

2.2.3 Ableitung der Schätzfunktionen aus dem Gauß-Markoff-Modell mit geänderter Gewichtsmatrix der Beobachtungen

Faßt man in dem gemischten Modellansatz $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z} + \mathbf{e}$ den Fehlerterm \mathbf{e} und den Zufallsanteil $\mathbf{B}\mathbf{z}$ zum Gesamtfehler

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{z} \quad (2.54)$$

zusammen, so erhält man ein gewöhnliches Gauß-Markoff-Modell

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{e}} \quad (2.55)$$

mit

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{e}}\bar{\mathbf{e}}} = \mathbf{Q}_{\text{ee}} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\text{zz}}\mathbf{B}^\top , \quad (2.56)$$

in dem sich die Zufallsparameter lediglich durch die um den additiven Term $\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\text{zz}}\mathbf{B}^\top$ geänderte Kofaktorenmatrix der Beobachtungen bemerkbar machen. Die Methode der kleinsten Quadrate führt zu den bekannten Schätzfunktionen für den Vektor der Trendparameter $\hat{\mathbf{x}}$ und die a posteriori Gewichtseinheit s_0^2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{v}} \quad , \quad \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1} = (\mathbf{Q}_{\text{ee}} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\text{zz}}\mathbf{B}^\top)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^\top \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{y} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A}^\top \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{A})^{-1} \\ s_0^2 &= \frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{v}}}{n - u} = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^\top \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})}{n - u} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Der Vergleich mit (2.34), (2.36) und (2.44) zeigt, daß auch dieser Weg zu denselben Ergebnissen führt wie vorher.

Da keine größer dimensionierten Matrizen als gegenüber dem gewöhnlichen Gauß-Markoff-Modell mit festen Parametern auftreten, ergeben sich bei diesem Lösungsweg rechentechnische Vorteile, insbesondere wenn allein die bestmögliche Schätzung der deterministischen Parameter \hat{x}_i unter Berücksichtigung aller stochastischen Einflüsse von Interesse ist.

2.3 Behandlung von Rangdefekten

Die im vorstehenden Kapitel abgeleiteten Lösungsformeln gelten unter der Voraussetzung, daß alle auftretenden Inversen eindeutig gebildet werden können. Diese Voraussetzung soll nun fallengelassen werden.

2.3.1 Spaltensinguläre Koeffizientenmatrix der festen Parameter

Für die Schätzung des deterministischen festen Parametervektors x in dem gemischten Modell wird die Inverse der $u \times u$ Normalgleichungsmatrix

$$\mathcal{N} = \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{A} \quad (2.58)$$

benötigt. Wenn die Koeffizientenmatrix \mathcal{A} vollen Spaltenrang besitzt [$\text{rg}(\mathcal{A}) = u$], existiert eine eindeutige reguläre Inverse \mathcal{N}^{-1} und damit ein eindeutiger Lösungsvektor \hat{x} des Normalgleichungssystems. Es wird nun zunächst nur ein Rangabfall der Matrix \mathcal{A} unterstellt bei weiterhin regulärer Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{yy} :

$$\text{rg}(\mathcal{A}) < u \quad (2.59)$$

In diesem Fall wird die Normalgleichungsmatrix \mathcal{N} singular und es gibt eine unbeschränkte Menge von Lösungsvektoren $\{x^0\}$, die das Normalgleichungssystem

$$\mathcal{N}x^0 = \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} y \quad (2.60)$$

erfüllen, das heißt die Parameter sind keine erwartungstreu schätzbaren Größen. Es gibt jedoch stets Linearkombinationen der Parameter x_i , die auch im rangdefekten Modell erwartungstreu schätzbar sind und damit als

Grundlage für die nachfolgende Analyse der Ergebnisse geeignet sind.

Eine lineare Funktion der Parameter

$$g = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x} \quad (2.61)$$

mit \boldsymbol{f} als $u \times 1$ Koeffizientenvektor wird eine schätzbare Funktion genannt, wenn sie sich als Linearkombination der Erwartungswerte der Beobachtungen darstellen läßt, das heißt, wenn ein Vektor \boldsymbol{t} existiert, so daß $\boldsymbol{t}^T E(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x}$ für alle \boldsymbol{x} gilt. Schätzbare Funktionen haben die Eigenschaft, daß für sie Schätzfunktionen angegeben werden können, die stets zu eindeutigen Lösungen mit minimaler Varianz führen, wenn eine beliebige spezielle Lösung aus $\{\boldsymbol{x}^0\}$ gewählt wird [SEARLE 1971, S. 181].

Wenn mit solchen schätzbaren Funktionen gearbeitet wird, kann das Normalgleichungssystem mit jeder beliebigen generalisierten Inversen \boldsymbol{N}^- , die die Bedingung $\boldsymbol{N} \boldsymbol{N}^- \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}$ erfüllt, gelöst werden

$$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{N}^- \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{yy}^{-1} \boldsymbol{y} . \quad (2.62)$$

Die Schätzung $\hat{g} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x}^0$ ist für jede Wahl von \boldsymbol{N}^- erwartungstreu ($E(\hat{g}) = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x}$) mit eindeutiger Varianz $\text{Var}(\hat{g}) = \sigma_0^2 \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{N}^- \boldsymbol{f}$.

Eine spezielle Lösung für \boldsymbol{x}^0 erhält man, wenn man für \boldsymbol{N}^- die Moore-Penrose-Inverse \boldsymbol{N}^+ wählt

$$\boldsymbol{x}_{\text{MP}}^0 = \boldsymbol{N}^+ \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{yy}^{-1} \boldsymbol{y} . \quad (2.63)$$

Diese Lösung erhält man, wenn

$$\boldsymbol{x}^{0T} \boldsymbol{x}^0 = \text{Min} \quad (2.64)$$

gefordert wird. Außerdem gilt für diese Lösung

$$\text{tr} \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{x}^0 \boldsymbol{x}^0} = \text{tr} \boldsymbol{N}^+ \leq \text{tr} \boldsymbol{N}^- . \quad (2.65)$$

Der Vektor der ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^0$ gehört zu den schätzbaren Funktionen [GRAFAREND, SCHAFFRIN 1974] und damit ebenfalls der Vektor der Gesamtverbesserungen $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}$ aus Abschnitt 2.2.3. Da die Zufallsparameter \hat{z}_i nach Gleichung (2.35) als Funktion der Differenz $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^0 = -\bar{\boldsymbol{v}}$ bestimmt werden, sind sie ebenfalls schätzbar, das heißt sie

werden von der Wahl der generalisierten Inversen nicht beeinflusst und sind eindeutig. Aus dem gleichen Grund erhält man eine erwartungstreue a posteriori Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit.

Bei der Lösung nach 2.2.2 im Gauß-Markoff-Modell mit erweitertem Beobachtungsvektor gelten analoge Überlegungen bezüglich der erweiterten Koeffizientenmatrix $\overline{\mathcal{A}}$, die den gleichen Rangabfall wie die Matrix \mathcal{A} aufweist.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß man für jede schätzbare Funktion $g = \mathbf{f}^T \mathbf{x}$ der festen Parameter x_i erwartungstreue Schätzwerte erhält

$$E(\hat{g}) = E(\mathbf{f}^T \mathbf{x}^0) = \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad (2.66)$$

wenn \mathbf{x}^0 eine Lösung des Gleichungssystems

$$(\mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{A}) \mathbf{x}^0 = \mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.67)$$

darstellt. Die Matrizenausdrücke der Form $\mathcal{N}^{-1} = (\mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^{-1} \mathcal{A})^{-1}$ im Abschnitt 2.2.3 bzw. $\overline{\mathcal{N}}^{-1} = (\overline{\mathcal{A}}^T \mathcal{Q}_{\overline{y}\overline{y}}^{-1} \overline{\mathcal{A}})^{-1}$ im Abschnitt 2.2.2 können durch eine beliebige generalisierte Inverse \mathcal{N}^- bzw. $\overline{\mathcal{N}}^-$ ersetzt werden.

Der Freiheitsgrad in der Ausgleichung beträgt

$$f = n - \text{rg}(\mathcal{A}). \quad (2.68)$$

2.3.2 Singularitäten im stochastischen Teil des Modells

In dem gemischten Modell $\mathbf{y} = \mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{z} + \mathbf{e}$, das in dieser Arbeit für die Generalisierung von geometrischen Objektdeformationen angewendet werden soll, bilden Punktkoordinaten oder Koordinatendifferenzen den $n \times 1$ Beobachtungsvektor \mathbf{y} . Aus den Netzausgleichungen ist die Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} , die die algebraischen Korrelationen aufgrund der Netzkonfiguration und der Beobachtungsanordnung enthält, bekannt. Der Vektor der Koordinaten oder der Koordinatendifferenzen ist in der Regel ein von ursprünglichen Beobachtungen l_i (z.B. Strecken, Richtungen, Höhenunterschiede) abgeleiteter Vektor

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \mathbf{l} + \mathbf{c} \quad (2.69)$$

mit \mathbf{c} als nichtstochastischem $n \times 1$ Konstantenvektor und \mathcal{F} als $n \times m$ Koeffizientenmatrix. Die zu dem Vektor \mathbf{y} gehörende $n \times n$ Kofaktorenmatrix, die den

Fehlereinfluß der ursprünglichen Beobachtungen beschreibt,

$$Q_{ee} = F Q_{11} F^T \quad (2.70)$$

ist genau dann positiv definit, bei positiv definit vorausgesetzter Q_{11} -Matrix, wenn F zeilenregulär ist. Ist F nicht zeilenregulär, so führt das zu einer positiv semidefiniten Kofaktorenmatrix mit

$$\text{rg}(Q_{ee}) = r < n . \quad (2.71)$$

Das ist immer dann der Fall, wenn Datums- oder Konfigurationsdefekte auf den Vektor y übertragen werden.

Die in diesem Abschnitt aufgestellten Behauptungen über die Eigenschaften von Vektoren und Matrizen lassen sich mit Definitionen und Sätzen der linearen Algebra und der Theorie linearer Modelle beweisen. Es wird daher auf einschlägige Lehrbücher verwiesen [SEARLE 1971, RAO 1973, KOCH 1980].

Zunächst werden die Konsequenzen untersucht, die sich durch einen Rangabfall der Matrix Q_{ee} in einem festen Gauß-Markoff-Modell

$$y = Ax + e \quad , \quad \text{Var}(e) = \text{Var}(y) = \sigma_0^2 Q_{ee} \quad (2.1)$$

ergeben. Vorbereitend sei die Konsistenzbedingung, die ein sinnvoll formuliertes Modell erfüllen muß, genannt:

Das Modell (2.1) ist konsistent, wenn der Vektor y in dem Vektorraum liegt, der durch Vereinigung der Spaltenräume von A und Q_{ee} entsteht

$$y \in S(A; Q_{ee}) . \quad (2.72)$$

Außerdem werden die beiden zeilenregulären Matrizen G^T und K^T eingeführt, die wie folgt definiert sind:

G^T sei eine $(n-r) \times n$ Matrix, deren Zeilen das orthogonale Komplement $S(Q_{ee})^\perp$ des Spaltenraums von Q_{ee} aufspannen (z.B. die Eigenvektoren zu den $n-r$ Eigenwerten Null von Q_{ee}), und (2.73)

K^T sei eine $r \times n$ Matrix, deren Zeilen eine Basis im Spaltenraum $S(Q_{ee})^\perp$ von Q_{ee} bilden (z.B. die Eigenwerte zu den von Null

verschiedenen Eigenwerten der Matrix Q_{ee}).

Aus dieser Definition folgt die Beziehung

$$G^T Q_{ee} = 0 \quad (2.74)$$

und wegen (2.70) auch

$$G^T F = 0 \quad , \quad (2.75)$$

da vorausgesetzt wurde, daß Q_{11} vollen Rang hat. Multipliziert man (2.1) linksseitig mit G^T

$$G^T y = G^T A x + G^T e \quad , \quad (2.76)$$

so folgt wegen $E(G^T e) = G^T E(e) = 0$ und $\text{Var}(G^T e) = \sigma_0^2 G^T Q_{ee} G = 0$ auch

$$G^T e = 0 \quad (2.77)$$

und in Verbindung mit (2.69)

$$G^T y = G^T c = G^T A x \quad . \quad (2.78)$$

Die Gleichung $G^T y = G^T A x$ läßt die deterministischen Beziehungen zwischen den Komponenten von y und den Komponenten von x erkennen, die in dem Modell (2.1) aufgrund des Rangabfalls der Kofaktorenmatrix Q_{ee} implizit enthalten sind.

Nur wenn $G^T A = 0$ gilt, beziehen sich die im Modell enthaltenen linearen Abhängigkeiten wegen

$$G^T y = G^T c = 0 \quad , \quad \text{Var}(G^T y) = 0 \quad (2.79)$$

ausschließlich auf den Beobachtungsvektor y . $G^T A = 0$ gilt dann, wenn der Spaltenraum der Matrix A vollständig in dem Spaltenraum der Matrix Q_{ee} enthalten ist

$$S(A) \subset S(Q_{ee}) \quad . \quad (2.80)$$

Die Konsistenzbedingung (2.72) vereinfacht sich in dem Fall zu

$$y \in S(Q_{ee}) \quad . \quad (2.81)$$

Wenn \mathcal{A} vollen Spaltenrang $[\text{rg}(\mathcal{A}) = u]$ besitzt, so kann gezeigt werden, daß sich unter der Voraussetzung (2.80) der Modellansatz (2.1) mit singulärer Varianz-Kovarianz-Matrix auf ein reguläres Problem zurückführen läßt. Multipliziert man nämlich (2.1) mit der in (2.73) definierten Matrix \mathcal{K}^\top

$$\mathcal{K}^\top \mathbf{y} = \mathcal{K}^\top \mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{K}^\top \mathbf{e} \quad , \quad \text{Var}(\mathcal{K}^\top \mathbf{e}) = \sigma_0^2 \mathcal{K}^\top \mathcal{Q}_{ee} \mathcal{K} \quad , \quad (2.82)$$

so besitzt das derart transformierte Modell

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathcal{A}} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{e}} \quad , \quad \text{Var}(\tilde{\mathbf{y}}) = \text{Var}(\tilde{\mathbf{e}}) = \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{\tilde{e}\tilde{e}} \quad (2.83)$$

eine positiv definite $r \times r$ Kofaktorenmatrix, da \mathcal{K}^\top zeilenregulär ist.

Unter den getroffenen Voraussetzungen $S(\mathcal{A}) \subset S(\mathcal{Q}_{ee})$ und $\text{rg}(\mathcal{A}) = u$ besitzt die transformierte Koeffizientenmatrix $\tilde{\mathcal{A}}$ ebenfalls vollen Spaltenrang. Das bedeutet, daß die Parameter x_i auch bei einem Rangabfall der Matrix \mathcal{Q}_{ee} erwartungstreu schätzbare Größen sind. Ist der Spaltenraum von \mathcal{A} nicht vollständig in dem Spaltenraum von \mathcal{Q}_{ee} enthalten, so gilt $\text{rg}(\mathcal{K}^\top \mathcal{A}) < u$, und es müssen zusätzliche, durch (2.78) gegebene Restriktionen zwischen den Parametern berücksichtigt werden, um eine Lösung für \mathbf{x} zu erhalten.

Um zu verdeutlichen, was es heißt, wenn in dem Modell (2.1) der Spaltenraum der Matrix \mathcal{A} nicht vollständig in dem Spaltenraum von \mathcal{Q}_{ee} enthalten ist, sei ein extremes Beispiel konstruiert durch den Ansatz

$$\mathbf{y} = \mathcal{H} \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad , \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{ee} \quad . \quad (2.84)$$

Der Vektor \mathbf{y} stelle den Vektor der Koordinatendifferenzen $\mathbf{y} = \mathbf{y}'_2 - \mathbf{y}'_1$ eines zweimal beobachteten freien Deformationsnetzes dar. Da die Koordinaten nicht ohne Verfügung über die unbestimmten Datumparameter geschätzt werden konnten, wurden sie unter den Bedingungen

$$\mathcal{H}^\top \mathbf{y}'_1 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^\top \mathbf{y}'_2 = \mathbf{0} \quad (2.85)$$

ausgeglichen, wobei die Zeilen von \mathcal{H}^\top eine orthogonale Basis im orthogonalen Komplement des Spaltenraums der Normalgleichungsmatrix aufspannen, was bekanntlich einer Auffelderung des Netzes auf die in beiden Epochen identischen Näherungskordinaten im Sinne einer Helmerttransformation entspricht. Die Komponenten des Parametervektors \mathbf{x} in (2.84) seien die Parameter einer

Ähnlichkeitstransformation, mit der sich die Bewegung zwischen den beiden Epochen approximieren läßt. Es leuchtet unmittelbar ein, daß der Vektor der Koordinatendifferenzen diese Information nicht liefern kann, da wegen (2.85) $\mathcal{H}^T(\mathbf{y}'_2 - \mathbf{y}'_1) = \mathcal{H}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ gilt. Da die Zeilen von \mathcal{H}^T wegen der speziellen Wahl der Datumsverfügungen (2.85) ebenfalls eine Basis für $S(\mathcal{Q}_{ee})^\perp$ bilden, müssen die Restriktionen

$$\mathcal{H}^T \mathbf{y} = \mathcal{H}^T \mathcal{H} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.86)$$

nach (2.78) zwischen den Komponenten des Parametervektors \mathbf{x} gelten.

Multipliziert man (2.84) mit \mathcal{K}^T , wobei \mathcal{K}^T wieder durch (2.73) definiert ist, so ergibt sich als transformierte Koeffizientenmatrix eine $r \times u$ Nullmatrix, da die von \mathcal{K} und \mathcal{H} aufgespannten Räume orthogonal sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^T \mathbf{y} &= \mathcal{K}^T \mathcal{H} \mathbf{x} + \mathcal{K}^T \mathbf{e} \\ \mathcal{K}^T \mathbf{y} &= \mathbf{0} + \mathcal{K}^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Der Parametervektor ist also vollständig durch die Bedingungsgleichungen (2.86) festgelegt, das heißt der Vektor \mathbf{x} ist a priori der Nullvektor.

Im Gegensatz zu den vorangegangenen freien Netzausgleichungen mit freien Datumsparametern, die mehr oder weniger willkürlich festgelegt werden können, sind bei dem hier angesprochenen Problem einer Folgeausgleichung implizite, wohldefinierte Bedingungen zwischen den Parametern in dem Ausgleichungsansatz enthalten. Das Modell beinhaltet also versteckte Informationen über die Parameter, die nicht allein aus dem Beobachtungsmaterial stammen. Hat man aber zusätzliche deterministische Informationen über die Modellparameter, so können diese durch explizite Bedingungsgleichungen berücksichtigt werden, oder aber die Zahl der Parameter wird entsprechend reduziert (siehe Kapitel 4.1.1). Deshalb soll im folgenden unterstellt werden, daß der Spaltenraum der Koeffizientenmatrix \mathcal{A} stets in dem Raum, der von der Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} gebildet wird, enthalten ist.

Nun sollen die Überlegungen, die für das feste Modell angestellt wurden, auf das gemischte Modell übertragen werden.

Die aus den Netzausgleichungen resultierende Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} ist regulär, wenn die Koordinaten im Anschluß an eine genügende Anzahl von Festpunkten bestimmt worden sind, das Datum des Netzes also eindeutig definiert

ist und wenn keine Konfigurationsdefekte vorliegen.

In einem freien Netz ohne Referenzpunkte jedoch oder bei Konfigurationsdefekten entsteht bei der Netzausgleichung ein Normalgleichungssystem mit dann singulärer $n \times n$ Normalgleichungsmatrix \mathcal{W} , das heißt $\text{rg}(\mathcal{W}) = r < n$. Zur Lösung dieses Gleichungssystems müssen in irgendeiner Weise $n-r$ linear unabhängige, nicht stochastische Zusatzbedingungen formuliert werden, die sich stets auf die Form

$$\mathcal{G}^T \mathbf{y}' = \mathbf{0} \quad (2.88)$$

bringen lassen. \mathcal{G}^T ist eine $(n-r) \times n$ Matrix und \mathbf{y}' der Vektor der Punktkoordinaten einer Epoche. Für den Vektor \mathbf{y} der Koordinatendifferenzen aus zwei Epochen gilt, wenn in beiden Epochen die gleichen Restriktionen (2.88) gewählt worden sind, ebenfalls $\mathcal{G}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Die mit der Matrix \mathcal{G} geränderte Normalgleichungsmatrix

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

hat vollen Rang $\text{rg}(\mathcal{D}) = 2n-r$ und besitzt die eindeutige Inverse

$$\mathcal{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_G & \mathcal{P} \\ \mathcal{P}^T & \mathcal{R} \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

Die $u \times u$ Submatrix \mathcal{Q}_G ist dann eine symmetrische, reflexive generalisierte Inverse von \mathcal{W} ($\mathcal{Q}_G = \mathcal{W}_{rs}^-$). Sie ist abhängig von den gewählten Restriktionen (2.88).

Wegen

$$\mathcal{G}^T \mathcal{Q}_G = \mathbf{0} \quad (2.91)$$

spannen die Zeilen von \mathcal{G}^T das orthogonale Komplement des Spaltenraums der Inversen \mathcal{Q}_G auf, die als reflexive Inverse denselben Rang wie die Normalgleichungsmatrix \mathcal{W} besitzt, so daß die Bedingungen (2.88) implizit in der Matrix \mathcal{Q}_G enthalten sind. Das Produkt

$$\mathcal{T}_G = \mathcal{Q}_G \mathcal{W} \quad (2.92)$$

ist eine idempotente Matrix und daher ein Projektionsoperator, mit dem der n -dimensionale Vektorraum auf den durch (2.88) definierten r -dimensionalen Unterraum projiziert wird. Für den Projektionsoperator existiert die Darstellung [KOCH 1980, S. 59]

$$\mathcal{Q}_G \mathcal{W} = \mathcal{T}_G = \mathbf{E}_n - \mathcal{H} (\mathcal{G}^\top \mathcal{H})^{-1} \mathcal{G}^\top . \quad (2.93)$$

Die $(n-r) \times n$ Matrix \mathcal{H}^\top enthält als Zeilen die $n-r$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten Null der Normalgleichungsmatrix \mathcal{W} .

Die Koeffizientenmatrix \mathcal{B} in dem gemischten Modell bestimmt den Einfluß der Zufallsparameter z_i auf die Beobachtungen y_i . Die Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{zz} wird als regulär vorausgesetzt. Ist das Modell so formuliert, daß \mathcal{B} zeilenregulär ist, so ist das Produkt $\mathcal{B} \mathbf{z} = \mathbf{z}'$ ein $n \times 1$ Vektor mit regulärer Kofaktorenmatrix $\mathcal{B} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}^\top$.

Ist der Beobachtungsvektor \mathbf{y} durch Projektion auf den r -dimensionalen Unterraum des n -dimensionalen Vektorraums entstanden, indem die Restriktionen $\mathcal{G}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$ formuliert wurden, so müssen diese $n-r$ Restriktionen auch in dem gemischten Modell Bestand haben. Die Matrix \mathcal{B} ist daher so in den r -dimensionalen Unterraum zu projizieren, daß

$$\mathcal{G}^\top \mathcal{B}_G \mathbf{z} = \mathcal{G}^\top \mathbf{z}' = \mathbf{0} \quad (2.94)$$

erfüllt ist. Dieser Forderung wird man durch Multiplikation der zeilenregulären Matrix \mathcal{B} mit dem Projektionsoperator (2.93) gerecht

$$\mathcal{B}_G = \mathcal{T}_G \mathcal{B} , \quad (2.95)$$

so daß sich das Modell bei singulärer Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} folgendermaßen darstellt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B}_G \mathbf{z} + \mathbf{e} \\ &= \mathcal{A} \mathbf{x} + \mathbf{z}' + \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Wegen $\mathcal{G}^\top \mathcal{T}_G = \mathbf{0}$ und $\mathcal{G}^\top \mathcal{A} = \mathbf{0}$ ist dann $\mathcal{G}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$ erfüllt. Außerdem gilt wegen $\mathcal{G}^\top \mathcal{B}_G = \mathbf{0}$ und $\mathcal{G}^\top \mathcal{Q}_{ee} = \mathbf{0}$ auch

$$\mathcal{G}^\top \mathcal{Q}_{yy} = \mathcal{G}^\top (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{B}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{B}_G^\top) = \mathbf{0} . \quad (2.97)$$

Das bedeutet, daß die Kofaktorenmatrix Q_{yy} in dem gemischten Modell denselben Rangdefekt besitzt, wie die aus den Netzausgleichungen resultierende Kofaktorenmatrix Q_{ee} :

$$\text{rg}(Q_{yy}) = \text{rg}(Q_{ee} + B_G Q_{zz} B_G^T) = r < n \quad (2.98)$$

Die Schätzung der festen Parameter x_i als Lösung des Gleichungssystems

$$A^T(Q_{ee} + B_G Q_{zz} B_G^T)^{-1} A \hat{x} = A^T(Q_{ee} + B_G Q_{zz} B_G^T)^{-1} y \quad (2.99)$$

ist, da nach Voraussetzung $S(A)$ und y in $S(Q_{yy})$ enthalten sind, invariant gegenüber jeder Wahl für die generalisierte Inverse von Q_{yy} . Da für Q_{yy}^- auch die generalisierte Inverse mit vollem Rang $(Q_{yy} + G G^T)^{-1}$ eingesetzt werden kann, ist die Normalgleichungsmatrix $A^T Q_{yy}^- A$ regulär und die Komponenten des Parametervektors x sind erwartungstreu schätzbare Größen, wenn A vollen Spaltenrang besitzt. Wenn A nicht vollen Spaltenrang besitzt, gelten die im Abschnitt 2.3.1 getroffenen Feststellungen.

Die gleichen Überlegungen können für den im Abschnitt 2.2.2 formulierten Lösungsansatz angestellt werden, so daß sich auch für die Zufallsparameter \hat{s}_i bzw. \hat{z}_i eine eindeutige Lösung unabhängig von der Wahl der generalisierten Inversen

$$Q_{yy}^- = P_{yy} = \begin{pmatrix} Q_{ee} & 0 \\ 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.100)$$

ergibt $[\text{rg}(Q_{yy}^-) = \text{rg}(Q_{ee}) + \text{rg}(Q_{zz})]$. Die erweiterte Normalgleichungsmatrix

$$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B_G^T & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ee} & 0 \\ 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B_G \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

ist ebenfalls regulär, wenn A vollen Spaltenrang besitzt.

Die a posteriori Varianz der Gewichtseinheit nimmt in allen Fällen einen eindeutig definierten Wert an.

Für den in dem gemischten Modell auftretenden Term

$$z' = B z \quad (2.101)$$

errechnet sich eine reguläre Kofaktorenmatrix

$$Q_{z'z'} = B Q_{zz} B^T, \quad (2.102)$$

wenn die $n \times m$ Matrix B zeilenregulär ist. $Q_{z'z'}$ wird singulär, wenn die Matrix B zeilensingulär ist, das heißt, daß deterministische Beziehungen zwischen den Komponenten von z' bestehen. Für die Ausgleichung führt das zu keinen zusätzlichen Problemen, da bei regulärer Kofaktorenmatrix Q_{ee} die Summe

$$Q_{yy} = Q_{ee} + B Q_{zz} B^T \quad (2.103)$$

ebenfalls regulär ist, was leicht anhand der quadratischen Form $c^T Q_{yy} c$ mit $c \neq 0$ gezeigt werden kann. Das Produkt $B Q_{zz} B^T$ ist positiv semidefinit, so daß für die quadratische Form $c^T B Q_{zz} B^T c \geq 0$ gilt. Da aber $c^T Q_{ee} c$ immer einen Wert größer Null annimmt, gilt auch $c^T Q_{yy} c > 0$, und damit ist Q_{yy} positiv definit.

Der Freiheitsgrad in einer Ausgleichung mit einer Koeffizientenmatrix A vom Rang $\text{rg}(A) \leq u$ und einer Kofaktorenmatrix Q_{yy} vom Rang $\text{rg}(Q_{yy}) \leq n$ beträgt

$$f = \text{rg}(Q_{yy}) - \text{rg}(A), \quad (2.104)$$

wenn laut Voraussetzung $S(A) \subset S(Q_{yy})$ erfüllt ist.

2.4 Explizite Ableitung der Schätzfunktionen unter Einschluß einer möglicherweise singulären Kofaktorenmatrix der Beobachtungen

Im folgenden werden zur Vervollständigung der Schätzfunktionen der unbekannt-ten Größen für den allgemeineren Fall, nämlich $\text{rg}(Q_{ee}) = r \leq n$ entwickelt. Die so gefundenen Endformeln beinhalten dann ebenfalls die zum Teil bereits im Kapitel 2.2 genannten Ergebnisse für den regulären Fall, $\text{rg}(Q_{ee}) = n$. Das Modell sei im Hinblick auf die beabsichtigte Anwendung bei der Deformationsanalyse so gewählt, daß die $n \times u$ Matrix A vollen Spaltenrang besitzt [$\text{rg}(A) = u$].

2.4.1 Parameterschätzung

Die Formeln werden mit Hilfe des im Kapitel 2.2.2 dargestellten Lösungsansatzes abgeleitet. Da in dieser Arbeit das gemischte Modell ausschließlich mit $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ angewandt wird, lautet das System der Verbesserungsgleichungen für die Ausgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{y} + \mathbf{v} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}_G \hat{\boldsymbol{\delta}} \\ \mathbf{0}_z + \hat{\boldsymbol{\delta}} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\delta}} \end{aligned} \quad (2.105)$$

oder zusammengefaßt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \hat{\boldsymbol{\delta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T}_G \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\boldsymbol{\delta}} \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

mit der zugehörigen Kofaktorenmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

Als Gewichtsmatrix kann nach Kapitel 2.3.2 eine beliebige generalisierte Inverse von \mathbf{Q} gebildet werden. Zur Vereinfachung der folgenden Ableitungen wird diejenige Inverse gewählt, die vollen Rang besitzt, $\text{rg}(\mathbf{Q}^-) = \text{rg}(\mathbf{P}) = 2n$, und die durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} (\mathbf{Q}_{ee} + \mathcal{G} \mathcal{G}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{Q}}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

mit $\mathbf{Q}_{ee} + \mathcal{G} \mathcal{G}^T = \overline{\mathbf{Q}}_{ee}$ gegeben ist.

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \hat{\boldsymbol{\delta}} = \text{Min}$ führt zu dem Normalgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_G^T & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{Q}}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{T}_G \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\boldsymbol{\delta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_G^T & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{Q}}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.109)$$

welches ausmultipliziert die Form

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} & \mathcal{A}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \\ \hline \mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} & \mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \psi \\ \mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \psi \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

annimmt. Die Normalgleichungsmatrix in diesem System ist eine $(u+n) \times (u+n)$ Matrix und besitzt unter den getroffenen Voraussetzungen eine positive Determinante, so daß auch das hinreichende Kriterium für das Minimum erfüllt ist. Die Berechnung der Lösungsvektoren \hat{x} und \hat{s} über eine direkte Inversion der Normalgleichungsmatrix ist sehr aufwendig und für eine Programmierung weniger geeignet. Durch algebraische Umformungen ist es jedoch möglich, eine für die numerische Rechnung günstigere Formulierung zu finden. Dabei werden die folgenden Matrixidentitäten benutzt [KOCH 1980, S. 32]:

$$(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} = \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} - \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G (\mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1})^{-1} \mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \quad (2.111)$$

$$(\mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1})^{-1} = \mathcal{Q}_{zz} - \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \quad (2.112)$$

$$(\mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1})^{-1} \mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} = \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} \quad (2.113)$$

Aus (2.111) und (2.113) folgt

$$\bar{\mathcal{Q}}_{ee} (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} = \mathbf{E} - \mathcal{T}_G (\mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1})^{-1} \mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \quad (2.114)$$

$$\mathbf{E} - \mathcal{T}_G (\mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1})^{-1} \mathcal{T}_G^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} = \mathbf{E} - \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} . \quad (2.115)$$

Ein Vergleich der beiden letztgenannten Gleichungen zeigt, daß

$$\bar{\mathcal{Q}}_{ee} (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} = \mathbf{E} - \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} \quad (2.116)$$

gilt.

Zunächst werden die vier Submatrizen, die bei der Inversion der Normalgleichungsmatrix entstehen, durch Anwendung der allgemein geltenden Formeln für die Inversion einer Blockmatrix abgeleitet:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathcal{N}_{\hat{x}\hat{s}} \\ \mathcal{N}_{\hat{s}\hat{x}} & \mathcal{N}_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} &= \left[\mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} - \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} \right]^{-1} \\ &= \left[\mathcal{A}^\top \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} - \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \right) \mathcal{A} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.118)$$

im Hinblick auf (2.111):

$$\underline{\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \left[\mathcal{A}^\top \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} \mathcal{A} \right]^{-1}} \quad (2.119)$$

$$\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} = -\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \quad (2.120)$$

im Hinblick auf (2.113):

$$\underline{\mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{x}} = -\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz}} \quad (2.121)$$

$$\underline{\mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} = \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}}^\top} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} &= \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} + \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \cdot \\ &\quad \cdot \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.123)$$

im Hinblick auf (2.112):

$$\mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} = \mathcal{Q}_{zz} - \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} + \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} = \mathcal{Q}_{zz} - \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \left[\left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} - \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \cdot \right.} \\ \left. \cdot \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} \right] \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz}} \quad (2.125) \end{aligned}$$

Die Schätzfunktionen für die Parametervektoren \hat{x} und \hat{s} sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \boldsymbol{y} \\ \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \boldsymbol{y} \end{pmatrix}. \quad (2.126)$$

Durch Einsetzen der bisherigen Ergebnisse und unter Verwendung von (2.111) bzw. (2.113) findet man die Lösungsformeln für die Vektoren \hat{x} bzw. \hat{s} :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \boldsymbol{y} + \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \boldsymbol{y} \\ \hat{x} &= \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \left[\bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} - \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \right] \boldsymbol{y} \\ \hat{x} &= \underline{\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} \boldsymbol{y}} \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \boldsymbol{y} + \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \boldsymbol{y} \\ \hat{s} &= \left[\left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} + \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \cdot \right. \\ &\quad \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} - \\ &\quad \left. - \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \right] \boldsymbol{y} \\ \hat{s} &= \left[\left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \left(\boldsymbol{E} + \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \right) \right] \boldsymbol{y} \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\hat{s} = \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \left[\boldsymbol{y} - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^\top \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} - \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \right) \boldsymbol{y} \right]$$

$$\hat{s} = \left(\mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{T}_G + \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \right)^{-1} \mathcal{T}_G^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} (\boldsymbol{y} - \mathcal{A} \hat{x})$$

$$\hat{s} = \underline{\mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \left(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^\top \right)^{-1} (\boldsymbol{y} - \mathcal{A} \hat{x})}$$

Auch wenn $\text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) < n$, lassen sich also die n Komponenten des Vektors \hat{s} eindeutig schätzen. Diese Tatsache steht in Übereinstimmung mit dem Kollo-

kationsmodell, wo die Zahl der Komponenten des Signalvektors prinzipiell keinen Beschränkungen unterliegt (siehe Kapitel 2.1).

Die Schätzfunktionen für die Subvektoren \hat{z} und v des Residuenvektors lauten:

$$\underline{\hat{z}} = \hat{s} \quad (2.129)$$

$$v = \mathcal{A} \hat{x} + \mathcal{T}_G \hat{s} - y$$

$$v = \mathcal{T}_G \hat{s} - (y - \mathcal{A} \hat{x})$$

$$v = \left[\mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} - \mathcal{E} \right] (y - \mathcal{A} \hat{x}) \quad (2.130)$$

im Hinblick auf (2.116):

$$\underline{v} = - \bar{\mathcal{Q}}_{ee} (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} (y - \mathcal{A} \hat{x})$$

Wenn \mathcal{Q}_{ee} regulär ist, ist in den entsprechenden Matrixausdrücken $\bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1}$ durch \mathcal{Q}_{ee}^{-1} und \mathcal{T}_G durch die Einheitsmatrix \mathcal{E} zu ersetzen.

Da an inversen Matrizen lediglich $\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ und $(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1}$ bzw. $(\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz})^{-1}$ auftreten, sind die jeweiligen Endformeln für eine Programmierung hervorragend geeignet.

Die Berechnung der Trendparameter und ihrer Kofaktorenmatrix unterscheidet sich gegenüber einem Modell ohne Zufallsparameter nur dadurch, daß vor der Ausgleichung zu der ursprünglichen Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} der Term $\mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T$ bzw. die Matrix \mathcal{Q}_{zz} zu addieren ist (vergleiche Abschnitt 2.2.3).

2.4.2 Genauigkeitsschätzung

Die Schätzfunktion für die a posteriori Varianz der Gewichtseinheit in dem gemischten Modell ist gegeben durch

$$\begin{aligned} s_0^2 = \sigma_0^2 &= (v^T \hat{z}^T) \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \hat{z} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{f} \\ &= \frac{v^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} v + \hat{z}^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{z}}{f} . \end{aligned} \quad (2.131)$$

Einsetzen der Matrixausdrücke für \boldsymbol{v} und $\hat{\boldsymbol{z}}$ führt zu der Darstellung

$$s_0^2 = \frac{(\mathcal{A} \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y})^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} (\mathcal{A} \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y})}{f} . \quad (2.132)$$

Der Freiheitsgrad der Ausgleichung ist nach (2.104) definiert durch

$$\begin{aligned} f &= \text{rg} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz} \end{pmatrix} - \text{rg} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{T}_G \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ &= (r+n) - (u+n) \\ &= r - u \\ &= \text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) - u . \end{aligned} \quad (2.133)$$

Im regulären Fall gilt mit $r = n$

$$s_0^2 = \frac{(\mathcal{A} \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y})^T (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz})^{-1} (\mathcal{A} \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y})}{f} ; f = n - u . \quad (2.134)$$

Mit s_0^2 und den unter 2.4.1 abgeleiteten Kofaktorenmatrizen werden die Varianz-Kovarianz-Matrizen der Parametervektoren $\hat{\boldsymbol{x}}$ und $\hat{\boldsymbol{s}}$ geschätzt:

$$S_{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{s}}} = s_0^2 \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}} & \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{s}}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{x}}} & \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (2.105) liefert die Varianz-Kovarianz-Matrizen der ausgeglichenen Beobachtungsvektoren $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}$ und $\hat{\boldsymbol{s}} = \mathbf{0}_z + \hat{\boldsymbol{z}}$:

$$s_0^2 \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{y}}} & \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{s}}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{y}}} & \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \end{pmatrix} = s_0^2 \left(\begin{array}{c|c} (\mathcal{A} \mathcal{T}_G) \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}} & \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{s}}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{x}}} & \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \\ \mathcal{T}_G^T \end{pmatrix} & \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{s}}} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \\ \hline \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{x}}} \mathcal{A}^T + \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \mathcal{T}_G^T & \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \end{array} \right) \quad (2.136)$$

Subtrahiert man (2.136) von der Varianz-Kovarianz-Matrix der ursprünglichen Beobachtungen, so erhält man die Varianz-Kovarianz-Matrix für die Verbes-

serungsvektoren \mathbf{v} und $\hat{\mathbf{z}}$:

$$\begin{aligned}
 S_0^2 \begin{pmatrix} Q_{vv} & Q_{v\hat{z}} \\ Q_{\hat{z}v} & Q_{\hat{z}\hat{z}} \end{pmatrix} &= S_0^2 \begin{pmatrix} Q_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{zz} \end{pmatrix} - S_0^2 \begin{pmatrix} Q_{yy} & Q_{y\hat{s}} \\ Q_{\hat{s}y} & Q_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} \\
 &= S_0^2 \left(\begin{array}{c|c} Q_{ee} - Q_{yy} & -Q_{y\hat{s}} \\ \hline -Q_{\hat{s}y} & Q_{zz} - Q_{\hat{s}\hat{s}} \end{array} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.137}$$

Obwohl die Ergebnisse $\hat{\mathbf{s}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$ numerisch gleich sind, ergeben sich Unterschiede in der Varianz-Kovarianz-Matrix. Ein Vergleich mit den im Kapitel 2.2.1 angegebenen Beziehungen zeigt, daß zu dem Vektor $\hat{\mathbf{s}}$ die Varianz des bedingten Zufallsvektors $\mathbf{z} | (\mathbf{y} - \mathcal{A}\hat{\mathbf{x}})$ gehört

$$\text{Var}(\hat{\mathbf{s}}) = \text{Var}[\mathbf{z} | (\mathbf{y} - \mathcal{A}\hat{\mathbf{x}})] .
 \tag{2.138}$$

Außerdem gilt analog Gleichung (2.43) die Beziehung

$$Q_{\hat{s}\hat{s}} = Q_{zz} - Q_{\hat{z}\hat{z}} .
 \tag{2.139}$$

2.4.3 Geometrische Deutung der Parameterschätzung im gemischten Modell

Um die Unterschiede zwischen einer Ausgleichung im Gauß-Markoff-Modell und einer Ausgleichung im gemischten Modell zu verdeutlichen, seien die beiden Verfahren in ihrer geometrischen Interpretation gegenübergestellt. Dabei werden vereinfachend die Gewichtsmatrizen als Einheitsmatrizen angenommen.

Die Schätzung im Gauß-Markoff-Modell

$$\mathbf{y} + \mathbf{v}_F = \mathcal{A}\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathcal{P}_y = \mathbf{E}
 \tag{2.140}$$

unter der Bedingung

$$\mathbf{v}_F^T \mathbf{v}_F = \text{Min}
 \tag{2.141}$$

führt dazu, daß der Verbesserungsvektor \mathbf{v}_F und der Lösungsvektor $\mathbf{y} + \mathbf{v}_F = \mathcal{A}\hat{\mathbf{x}}$ senkrecht aufeinander stehen

$$\hat{\mathbf{x}}^T \mathcal{A}^T \mathbf{v}_F = 0 .
 \tag{2.142}$$

Dieser Zusammenhang läßt sich geometrisch als Projektion des im Beobachtungsraum $R(y)$ liegenden Vektors y auf den Lösungsraum $R(x)$ deuten. Die Projektion hat auf kürzestem Wege zu erfolgen. Im zweidimensionalen Raum wird dieser Zusammenhang anschaulich dargestellt, indem vom Vektor y das Lot auf die Lösungsgerade gefällt wird:

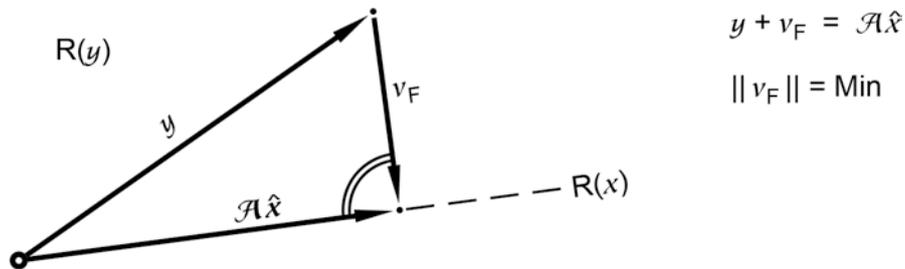


Abbildung 1 Parameterschätzung im Gauß-Markoff-Modell

Die Quadratsumme der Verbesserungen in dem festen Modell beträgt

$$\Omega_F = v_F^T v_F . \quad (2.143)$$

Die Ausgleichung in dem gemischten Modell

$$\begin{pmatrix} y \\ 0_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_M \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{E} \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{s} \end{pmatrix} ; \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

unter der Bedingung

$$v_M^T v_M + \hat{z}^T \hat{z} = \text{Min} \quad (2.145)$$

führt zu der Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T & 0 \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_M \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^T \cdot v_M \\ v_M + \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.146)$$

Durch linksseitige Multiplikation mit \hat{x}^T unter Beachtung, daß bei der speziellen Wahl der Gewichtsmatrix $v_M = -\hat{z}$ gilt, erhält man die beiden Orthogonalitätsrelationen

$$\hat{x}^T \mathcal{A}^T v_M = 0 \quad (2.147)$$

$$\text{und } \hat{x}^T \mathcal{A}^T (-\hat{z}) = 0, \quad (2.148)$$

die erkennen lassen, daß die Vektoren \mathbf{v}_M und \hat{z} beide senkrecht auf dem Vektor $\mathcal{A}\hat{x}$ stehen und entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Beziehungen lassen sich wieder auf den zweidimensionalen Raum übertragen und in der folgenden Abbildung geometrisch veranschaulichen.

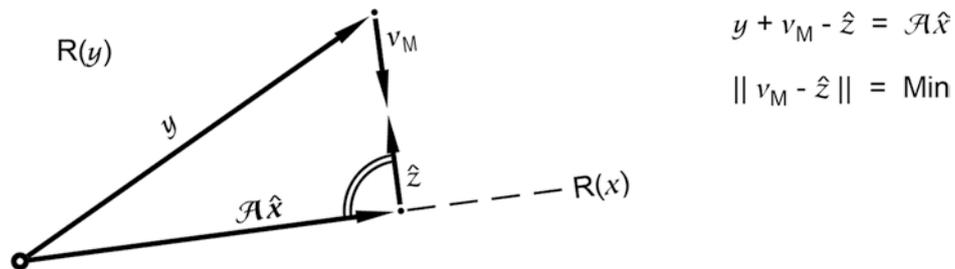


Abbildung 2 Parameterschätzung in dem gemischten Modell

Unter der vereinfachten Gewichtsannahme gilt $\mathbf{v}_M = -\hat{z}$. Damit erhält man für die Quadratsumme der Verbesserungen

$$\begin{aligned} \Omega_M &= \mathbf{v}_M^T \mathbf{v}_M + \hat{z}^T \hat{z} \\ &= 2\mathbf{v}_M^T \mathbf{v}_M, \end{aligned} \quad (2.149)$$

und wegen $\mathbf{v}_M = \frac{1}{2} \mathbf{v}_F$, wie man aus den beiden Abbildungen herauslesen kann, gilt

$$\Omega_M = \frac{1}{2} \Omega_F. \quad (2.150)$$

Der Lösungsvektor \hat{x} ist in beiden Modellen nur dann identisch, wenn die Kofaktorenmatrizen \mathcal{Q}_{ee} und \mathcal{Q}_{zz} durch die einfache Beziehung $\mathcal{Q}_{ee} = k \cdot \mathcal{Q}_{zz}$ verbunden sind, also gleiche Struktur aufweisen. Bei unterschiedlicher Struktur ändert sich die Metrik im Beobachtungsraum beim Übergang vom festen zum gemischten Modell und beide Modelle führen dann zu unterschiedlichen Lösungsvektoren.

2.5 Quadratische Formen im gemischten Modell

Statistische Tests für die Modellüberprüfung und für Signifikanzuntersuchungen werden nahezu immer anhand quadratischer Formen durchgeführt, die aus

den im Modell auftretenden geschätzten Größen gebildet werden. Deshalb sollen in diesem Kapitel für einige im Hinblick auf die spätere Verwendung wichtige quadratische Formen die formelmäßigen Zusammenhänge abgeleitet werden und Aussagen über Erwartungswert und Verteilung dieser skalaren Größen zusammengestellt werden. Für die Ableitungen wird zunächst aus Vereinfachungsgründen ein lineares Ausgangsmodell unterstellt, so daß keine Näherungswerte für die Parameter eingeführt werden müssen.

2.5.1 Ableitung der formelmäßigen Zusammenhänge

Die in der Ausgleichung zu minimierende quadratische Form der Verbesserungen lautet in dem 'Gauß-Markoff-Modell mit erweitertem Beobachtungsvektor' (Kapitel 2.2.2)

$$q_r = (\mathbf{v}^T \hat{\mathbf{z}}^T) \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \mathbf{v}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} . \quad (2.151)$$

Die Matrix $\bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1}$ sei wieder wie in (2.108) definiert. Im regulären Fall existiert die eindeutige Inverse \mathcal{Q}_{ee}^{-1} .

Eine quadratische Form des Beobachtungsvektors ist gegeben durch

$$q_1 = (\mathbf{y}^T \mathbf{0}_z^T) \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_z \end{pmatrix} = \mathbf{y}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{y} , \quad (2.152)$$

und die quadratische Form des Parametervektors mit der Normalgleichungsmatrix (2.117) als Formmatrix besitzt die Darstellung

$$q_p = (\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{s}}^T) \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathcal{N}_{\hat{x}\hat{s}} \\ \mathcal{N}_{\hat{s}\hat{x}} & \mathcal{N}_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix} = (\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{s}}^T) \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix} . \quad (2.153)$$

Diese drei quadratischen Formen sind wie allgemein in jedem Gauß-Markoff-Modell verknüpft durch die Relation

$$q_r = q_1 - q_p . \quad (2.154)$$

Die entsprechenden quadratischen Formen für das 'Gauß-Markoff-Modell mit geänderter Gewichtsmatrix der Beobachtungen' (Kapitel 2.2.3)

$$\mathbf{y} = \mathcal{A} \hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{v}} \quad , \quad \mathcal{Q}_{yy} = \bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T \quad (2.155)$$

sind wie folgt definiert:

$$q_{\bar{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{v}}^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{y} - \mathcal{A} \hat{\mathbf{x}})^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathcal{A} \hat{\mathbf{x}}) \quad , \quad (2.156)$$

$$q_{\bar{\mathbf{v}}} = q_r = \Omega \quad [\text{vergleiche (2.131) und (2.132)}] \quad , \quad (2.157)$$

$$q_y = \mathbf{y}^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} \mathbf{y} \quad , \quad (2.158)$$

und

$$\begin{aligned} q_{\hat{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathcal{A}^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} \mathcal{A} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \hat{\mathbf{x}}^T \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.159)$$

Es gilt die zu (2.154) analoge Beziehung

$$q_{\bar{\mathbf{v}}} = q_y - q_{\hat{\mathbf{x}}} \quad . \quad (2.160)$$

Besitzt die Matrix \mathcal{Q}_{ee} vollen Rang, so ist der Klammerausdruck $(\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)$ durch $(\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz})$ zu ersetzen.

Die quadratische Form (2.153) soll nun über eine Dreieckszerlegung der Formmatrix in zwei Summanden entsprechend den beiden Subvektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{s}}$ aufgespalten werden.

Mit der Dreiecksmatrix

$$\mathcal{D} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{1/2} & \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}}^{-1/2} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}} \\ \hline \mathcal{O} & (\mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} - \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{x}}} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}})^{1/2} \end{array} \right) \quad (2.161)$$

nimmt (2.153) die Gestalt

$$q_p = (\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{s}}^T) \mathcal{D}^T \mathcal{D} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix} \quad (2.162)$$

an. Durch Bilden des neuen Vektors $\mathcal{D} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}$ reduziert sich die quadratische Form auf die Summe

$$q_p = (\mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_2^\top) \mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_2 . \quad (2.163)$$

Die Einheitsmatrix \mathbf{E} deutet an, daß die transformierten Vektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 unkorreliert sind. Einsetzen der so gefundenen Ausdrücke führt schließlich zu der Darstellung

$$q_p = (\hat{\mathbf{x}} + \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}})^\top \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} (\hat{\mathbf{x}} + \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}}) + \hat{\mathbf{s}}^\top (\mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} - \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{x}}} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}}) \hat{\mathbf{s}} \quad (2.164)$$

mit $\mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathcal{A}^\top \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \mathcal{A}$ und $\mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} - \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{x}}} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}} = \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}}^{-1}$. Substituiert man den Ausdruck $\hat{\mathbf{x}} + \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}}$ durch $\hat{\hat{\mathbf{x}}}$, so gilt im Hinblick auf (2.154) in einem gemischten Modell die grundlegende Beziehung

$$\mathbf{v}^\top \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^\top \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{y}^\top \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\hat{\mathbf{x}}}^\top \mathcal{A}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{A} \hat{\hat{\mathbf{x}}} - \hat{\mathbf{s}}^\top \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}}^{-1} \hat{\mathbf{s}} . \quad (2.165)$$

An dieser Gleichung ist gut zu erkennen, in welcher Weise der Vektor der Zufallsparameter $\hat{\mathbf{z}}$ bzw. der Vektor $\hat{\mathbf{s}}$ zu der Verringerung der quadratischen Form der Residuen beim Übergang vom festen zu dem gemischten Modell beiträgt. Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite sind das Ergebnis für $\mathbf{v}_F^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{v}_F$ einer Ausgleichung in dem festen Gauß-Markoff-Modell

$$\mathbf{y} = \mathcal{A} \hat{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{v}_F \quad , \quad \mathcal{P}_{yy} = \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} . \quad (2.166)$$

Die quadratische Form der Residuen ist in diesem Modell gegenüber dem gemischten Modell genau um den Betrag $\hat{\mathbf{s}}^\top \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}}^{-1} \hat{\mathbf{s}}$ größer:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{v}_F &= \mathbf{v}^\top \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^\top \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{s}}^\top \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}}^{-1} \hat{\mathbf{s}} \\ q_{v_F} &= q_r \quad \quad \quad + q_{\hat{\mathbf{s}}} \end{aligned} \quad (2.167)$$

Für spätere Signifikanzuntersuchungen der festen Parameter $\hat{\hat{\mathbf{x}}}_i$ ist auch die zu oben umgekehrte Zerlegung der quadratischen Form q_p nützlich, die, wenn vorher die Subvektoren $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{s}}$ bei gleichzeitiger Umordnung der Formmatrix vertauscht werden, auf dem gleichen Wege herbeigeführt werden kann. Das Ergebnis lautet in diesem Fall mit $\hat{\hat{\mathbf{s}}} = \hat{\mathbf{s}} + \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{x}}$:

$$q_p = \hat{\hat{\mathbf{s}}}^\top \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} \hat{\hat{\mathbf{s}}} + \hat{\hat{\mathbf{x}}}^\top \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\hat{\mathbf{x}}} \quad (2.168)$$

Die zu (2.165) äquivalente Relation ist durch

$$\mathbf{v}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{y}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}}^T \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \quad (2.169)$$

gegeben. Der Betrag von $\hat{\mathbf{x}}^T \mathcal{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}$ gibt den Anstieg der quadratischen Form der Residuen an, wenn eine Ausgleichung mit den a priori Zusatzbedingungen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ durchgeführt wird.

Vergleicht man (2.169) mit (2.160), so gilt offensichtlich

$$\mathbf{y}^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{J}_G^T \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{J}_G^T)^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}}^T \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}} . \quad (2.170)$$

2.5.2 Erwartungswerte und Verteilungen

Für die Anwendung statistischer Tests ist es wichtig, die Erwartungswerte und Verteilungen der unter 2.5.1 aufgestellten quadratischen Formen zu kennen. Bei ihrer Ableitung wird von den folgenden drei Sätzen Gebrauch gemacht [SEARLE 1971, S. 54-71]:

- (i) Die quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x}$ eines Vektors beliebig verteilter Zufallsvariablen $\mathbf{x} \sim \{\boldsymbol{\mu}, \mathcal{V}\}$ besitzt den Erwartungswert

$$E(\mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x}) = \text{tr}(\mathcal{A} \mathcal{V}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathcal{A} \boldsymbol{\mu} . \quad (2.171)$$

- (ii) Die quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x}$ eines Vektors normalverteilter Zufallsgrößen $\mathbf{x} \sim N\{\boldsymbol{\mu}, \mathcal{V}\}$ und \mathcal{V} möglicherweise singulär besitzt dann und nur dann die Verteilung

$$\mathbf{x}^T \mathcal{A} \mathbf{x} \sim \chi^2[\text{tr}(\mathcal{A} \mathcal{V}), \lambda] \quad (2.172)$$

mit dem Freiheitsgrad $\text{tr}(\mathcal{A} \mathcal{V})$ und dem Nichtzentralitätsparameter $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathcal{A} \boldsymbol{\mu}$, wenn

$$\mathcal{V} \mathcal{A} \mathcal{V} \mathcal{A} \mathcal{V} = \mathcal{V} \mathcal{A} \mathcal{V}$$

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathcal{A} \mathcal{V} = \boldsymbol{\mu}^T \mathcal{A} \mathcal{V} \mathcal{A} \mathcal{V} \quad (2.173)$$

$$\boldsymbol{\mu} \mathcal{A} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T \mathcal{A} \mathcal{V} \mathcal{A} \boldsymbol{\mu}$$

Wenn \mathcal{V} regulär ist, reduzieren sich die Bedingungen auf die Forderung nach Idempotenz des Produkts $\mathcal{A} \mathcal{V}$,

$$\mathcal{AV} = (\mathcal{AV})^2 \quad (2.174)$$

Außerdem gilt dann

$$\text{tr}(\mathcal{AV}) = \text{rg}(\mathcal{A}) . \quad (2.175)$$

(iii) Die quadratischen Formen $x^T \mathcal{A}x$ und $x^T \mathcal{B}x$ mit $x \sim N\{\mu, \mathcal{V}\}$ verteilt und \mathcal{V} möglicherweise singular sind dann und nur dann unabhängig verteilt, wenn

$$\begin{aligned} \mathcal{VAVBV} &= \mathbf{0} \\ \mathcal{VAVB}\mu &= \mathcal{VBV}\mathcal{A}\mu = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.176)$$

und

$$\mu^T \mathcal{AVB}\mu = 0 .$$

Wenn die Matrix \mathcal{V} regulär ist, lassen sich die drei Bedingungen in

$$\mathcal{AVB} = \mathbf{0} \quad (2.177)$$

zusammenfassen.

Der Erwartungswert der quadratischen Form der Residuen in dem gemischten Modell wird anhand von Gleichung (2.156) abgeleitet. Für den geschätzten Vektor \bar{v} wird Normalverteilung angenommen mit $E(\bar{v}) = \mathbf{0}$ und $\text{Var}(\bar{v}) = \sigma_0^2 (\mathcal{Q}_{yy} - \mathcal{Q}_{y\hat{y}})$:

$$\bar{v} \sim N\{\mathbf{0}, \sigma_0^2 (\mathcal{Q}_{yy} - \mathcal{Q}_{y\hat{y}})\} \quad (2.178)$$

$\mathcal{Q}_{y\hat{y}}$ bezeichnet die Kofaktorenmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen, die durch

$$\mathcal{Q}_{y\hat{y}} = \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \quad (2.179)$$

gegeben ist. Mit (2.171) folgt der Erwartungswert der quadratischen Formen q_r und $q_{\bar{v}}$:

$$\begin{aligned} E(q_r) &= E(q_{\bar{v}}) = E\left[\bar{v}^T (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{J}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{J}_G^T)^{-1} \bar{v}\right] \\ &= E\left(\bar{v}^T \mathcal{Q}_{yy}^- \bar{v}\right) \\ &= \sigma_0^2 \text{tr}(\mathcal{Q}_{yy}^- \mathcal{Q}_{\bar{v}\bar{v}}^-) \end{aligned} \quad (2.180)$$

Die Spur des Matrizenprodukts $\mathcal{Q}_{yy}^- \mathcal{Q}_{vv}^-$ ist gleich dem in (2.133) definierten Freiheitsgrad f in der Ausgleichung, wie die nachstehende Ableitung beweist:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathcal{Q}_{yy}^- \mathcal{Q}_{vv}^-) &= \text{tr}[\mathcal{Q}_{yy}^- (\mathcal{Q}_{yy} - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{xx} \mathcal{A}^T)] \\
&= \text{tr}(\mathcal{Q}_{yy}^- \mathcal{Q}_{yy}) - \text{tr}(\mathcal{Q}_{yy}^- \mathcal{A} \mathcal{Q}_{xx} \mathcal{A}^T) \\
&\quad (\text{und, da unter dem Spuroperator die Matrizen zyklisch ver-} \\
&\quad \text{tauscht w\u00fcrden d\u00fcrfen, gilt weiter:}) \\
&= \text{tr}(\mathcal{Q}_{yy} \mathcal{Q}_{yy}^-) - \text{tr}(\mathcal{A}^T \mathcal{Q}_{yy}^- \mathcal{A} \mathcal{Q}_{xx}) \\
&= \text{rg}(\mathcal{Q}_{yy}) - \text{tr} \mathbf{E}_u \\
&= \text{rg}(\mathcal{Q}_{yy}) - u \\
&= f
\end{aligned} \tag{2.181}$$

Damit gilt auch im gemischten Modell die Aussage

$$E(q_r) = E(q_v) = \sigma_0^2 \cdot f . \tag{2.182}$$

Dividiert man die quadratische Form der Residuen durch σ_0^2 , so erh\u00e4lt man eine χ^2 -verteilte Gr\u00f6\u00dfe mit dem Freiheitsgrad f und mit dem Nichtzentralit\u00e4tsparameter $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{v}}^T \frac{1}{\sigma_0^2} \bar{\mathcal{Q}}_{yy}^{-1} \bar{\mathbf{v}} &\sim \chi^2 \left[\text{tr} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} \bar{\mathcal{Q}}_{yy}^{-1} \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{vv}^- \right), 0 \right] \\
\frac{1}{\sigma_0^2} q_r &= \frac{1}{\sigma_0^2} q_v \sim \chi^2(f, 0)
\end{aligned} \tag{2.183}$$

Da das Produkt $\mathcal{Q}_{yy}^- \mathcal{Q}_{vv}^-$ idempotent ist, wie man sich durch Ausmultiplizieren leicht \u00fcberzeugt, sind die Bedingungen (2.173) erf\u00fcllt.

Die quadratische Form der Residuen setzt sich in dem gemischten Modell gem\u00e4\u00df Gleichung (2.151) aus zwei Komponenten zusammen, f\u00fcr die getrennt die Erwartungswerte berechnet werden k\u00f6nnen. F\u00fcr den Term $\mathbf{v}^T \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v}$ erh\u00e4lt man aus dem unter (2.171) formulierten Satz:

$$E(\mathbf{v}^T \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v}) = \sigma_0^2 \text{tr}(\bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} \mathcal{Q}_{vv}^-) \tag{2.184}$$

Setzt man wie in (2.137) $Q_{vv} = Q_{ee} - Q_{yy}$ mit $\hat{y} = y + v$ ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 E(v^T \bar{Q}_{ee}^{-1} v) &= \sigma_0^2 \left[\text{tr}(\bar{Q}_{ee}^{-1} Q_{ee}) - \text{tr}(\bar{Q}_{ee}^{-1} Q_{yy}) \right] \\
 &= \sigma_0^2 \left[\text{rg}(Q_{ee}) - \text{tr}(\bar{Q}_{ee}^{-1} Q_{yy}) \right] \\
 &= \sigma_0^2 r_e .
 \end{aligned} \tag{2.185}$$

Die entsprechende Ableitung, angewandt auf den Ausdruck $\hat{z}^T Q_{zz}^{-1} \hat{z}$ führt zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
 E(\hat{z}^T Q_{zz}^{-1} \hat{z}) &= \sigma_0^2 \text{tr}(Q_{zz}^{-1} Q_{zz}) \\
 &= \sigma_0^2 \left[\text{tr}(Q_{zz}^{-1} Q_{zz}) - \text{tr}(Q_{zz}^{-1} Q_{ss}) \right] \\
 &= \sigma_0^2 \left[n - \text{tr}(Q_{zz}^{-1} Q_{ss}) \right] \\
 &= \sigma_0^2 r_z .
 \end{aligned} \tag{2.186}$$

Die Summe beider Erwartungswerte (2.185) und (2.186) muß im Hinblick auf (2.182) gleich der Gesamtredundanz f der Ausgleichung multipliziert mit der Varianz der Gewichtseinheit sein, also gilt:

$$r_e + r_z = f . \tag{2.187}$$

Aus diesem Grund lassen sich die Größen r_e und r_z als Redundanzanteile interpretieren, mit der die mit den Fehlern e_i behafteten Beobachtungen y_i bzw. die mit den Fehlern z_i behafteten Pseudobeobachtungen 0_{z_i} zur Gesamtredundanz f beitragen.

Die in den Gleichungen (2.159) und (2.169) auftretende quadratische Form des geschätzten Parametervektors \hat{x} besitzt nach (2.171) den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
 E(q_{\hat{x}}) &= E(\hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x}) \\
 &= \sigma_0^2 \text{tr}(Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} Q_{\hat{x}\hat{x}}) + \hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} \\
 &= \sigma_0^2 u + \hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} ,
 \end{aligned} \tag{2.188}$$

und, da das Produkt $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} Q_{\hat{x}\hat{x}} = E$ idempotent ist, gilt nach (2.171) die Ver-

teilungsaussage

$$\frac{1}{\sigma_0^2} q_{\hat{x}} \sim \chi^2 \left(u, \frac{1}{2} \cdot x^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} x \right). \quad (2.189)$$

Die quadratischen Formen q_r und $q_{\hat{x}}$ sind unabhängig verteilt. Zum Beweis dieser Feststellung werden beide Ausdrücke als quadratische Form des Vektors y dargestellt:

$$\begin{aligned} q_r &= y^T (\mathbf{E} - \mathcal{P}_{yy} \mathcal{A} Q_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T) \mathcal{P}_{yy} (\mathbf{E} - \mathcal{A} Q_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{P}_{yy}) y \\ &= y^T \mathcal{S}_1 y \end{aligned} \quad (2.190)$$

$$\begin{aligned} q_{\hat{x}} &= y^T \mathcal{P}_{yy} \mathcal{A} Q_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{P}_{yy} y \\ &= y^T \mathcal{S}_2 y \end{aligned} \quad (2.191)$$

mit $\mathcal{P}_{yy} = Q_{yy}^- = (\bar{Q}_{ee} + \mathcal{J}_G Q_{zz} \mathcal{J}_G^T)^{-1}$.

Durch einfaches Ausmultiplizieren kann man zeigen, daß das Produkt, gebildet aus den beiden Formmatrizen und der Kofaktorenmatrix Q_{yy} , die Nullmatrix ergibt,

$$\mathcal{S}_1 Q_{yy} \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2 Q_{yy} \mathcal{S}_1 = \mathbf{0}, \quad (2.192)$$

und die Bedingungen (2.176) somit erfüllt sind.

Ebenso kann gezeigt werden, daß jede quadratische Form $q_f = f^T Q_{ff}^- f$ beliebiger Funktionen der ausgeglichenen Parameter

$$f = \mathcal{F} \hat{x}, \quad Q_{ff} = \mathcal{F} Q_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{F}^T \quad (2.193)$$

unabhängig von der quadratischen Form der Residuen ist.

Eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses führt zu dem Schluß, daß, wenn der aus einer Vorausgleichung stammende Parametervektor als Beobachtungsvektor in eine Folgeausgleichung eingeführt wird, die a posteriori Varianzschätzungen der Gewichtseinheit beider Ausgleichungen unabhängig verteilt sind.

Die Unabhängigkeit zweier quadratischer Formen ist von Bedeutung, wenn für

Hypothesentests von dem folgenden Satz Gebrauch gemacht wird:

der Quotient

$$F = \frac{q_1 / f_1}{q_2 / f_2}, \quad (2.194)$$

gebildet aus zwei unabhängig χ^2 -verteilten quadratischen Formen

$$\frac{q_1}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(f_1, 0), \quad \frac{q_2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(f_2, 0) \quad (2.195)$$

mit dem Nichtzentralitätsparameter $\lambda = 0$, folgt einer zentralen F-Verteilung mit f_1 und f_2 Freiheitsgraden

$$F \sim F_{(f_1, f_2)}. \quad (2.196)$$

2.5.3 Quadratische Formen bei nichtlinearen Funktionen

Besteht zwischen den Parametern x_i und den Beobachtungen y_i kein linearer Zusammenhang

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} + \mathbf{e}, \quad (2.197)$$

so sind alle in diesem Kapitel getroffenen Aussagen und Ableitungen auf das linearisierte Ausgangsmodell

$$\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{A}d\mathbf{x} + \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (2.198)$$

zu beziehen. In den Formeln sind lediglich der Vektor \mathbf{y} durch den Vektor $\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)$ und der Parametervektor \mathbf{x} bzw. $\hat{\mathbf{x}}$ durch den Vektor $d\mathbf{x}$ bzw. $d\hat{\mathbf{x}}$ der Abweichungen von den Näherungswerten zu ersetzen.

Insbesondere Gleichung (2.169) nimmt dann die Form

$$\mathbf{v}^T \bar{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^T Q_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} = [\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)]^T \bar{Q}_{ee}^{-1} [\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)] - \hat{\mathbf{s}}^T \mathcal{N}_{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}} \hat{\mathbf{s}} - d\hat{\mathbf{x}}^T Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} d\hat{\mathbf{x}} \quad (2.199)$$

an. Diese Beziehung zeigt, daß die quadratische Form der Residuen genau um den Betrag $d\hat{\mathbf{x}}^T Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} d\hat{\mathbf{x}}$ ansteigt, wenn eine Ausgleichung unter den a priori Zusatzbedingungen

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 \quad (2.200)$$

durchgeführt wird. Das Gleiche gilt auch bei einem ursprünglich linearen funktionalen Zusammenhang, wenn für die festen Parameter Näherungswerte eingeführt werden.

3. Analyse von Punktlageänderungen zwischen zwei Beobachtungsepochen

Ein zur Überwachung von Objektdeformationen angelegtes geodätisches Netz sei zu zwei verschiedenen Epochen beobachtet worden. Die Netzkonfiguration und Art und Genauigkeit der Beobachtungselemente können von Epoche zu Epoche variieren. Für jeden Punkt, der in beiden Epochen beobachtet worden ist, erhält man aus einer gemeinsamen Netzausgleichung beider Epochen oder aus zwei Einzelausgleichungen den Vektor der Punktlageänderungen, gebildet aus den Komponenten der Koordinatendifferenzen.

Aus den Netzausgleichungen kann ebenfalls die Varianz-Kovarianz-Matrix der Koordinatendifferenzen aller Punkte abgeleitet werden, die die Genauigkeit der Bestimmung der Punktverschiebungen und die algebraischen Korrelationen zwischen den Punkten zum Ausdruck bringt. Beides hängt von der Netzkonfiguration und vom Beobachtungsplan ab. Entsprechend der notwendigen Datumsverfugungen kann die Varianz-Kovarianz-Matrix einen Rangdefekt aufweisen.

Ziel der Analyse ist es, statistisch abgesicherte Antworten auf folgende Fragen zu erhalten:

- Sind die ermittelten Punktverschiebungen signifikant oder bewegen sie sich im Rahmen der unvermeidlichen Meßungenauigkeiten?
- Wenn die Frage nach der Signifikanz positiv beantwortet wird, wie lassen sich die Punkte, die sich bewegt haben, von den Punkten, die in ihrer Lage stabil geblieben sind, unter Berücksichtigung der algebraischen Korrelationen trennen?
- Resultieren die Punktverschiebungen aus systematischen Lage- und Formänderungen des gesamten Objekts oder handelt es sich um unregelmäßige Einzelpunktdeformationen?

Wenn die Antwort auf diese Fragen nicht offensichtlich ist, müssen Arbeitshypothesen aufgestellt werden, die mit den Mitteln statistischer Testverfahren auf ihre Gültigkeit hin untersucht werden müssen.

In diesem Kapitel wird ein in sich geschlossenes Auswerteverfahren entwickelt, das durch iteratives, an den Testergebnissen orientiertes Verbessern

des Ausgangsmodells eine Antwort auf die drei oben formulierten Fragen gibt.

3.1 Das gemischte Analysemodell mit Trend- und Zufallsanteil

Bei der Untersuchung von Deformationen technischer Bauwerke und von Bodenbewegungen oder bei der Erfassung geotektonischer Erscheinungen mit geodätischen Netzen wird häufig versucht, die Objektänderungen räumlich oder zeitlich zu generalisieren. Generalisieren bedeutet, über die Berechnung der Verschiebevektoren hinaus die Lage- und Formänderungen als Funktion einiger weniger geometrischer oder physikalischer Parameter zu beschreiben. Dadurch wird die Interpretation der gemessenen Erscheinung erleichtert.

So werden zum Beispiel aus beobachteten Höhenänderungen in Nivellementsnetzen Rückschlüsse auf großräumige Schollenkipnungen gezogen [PELZER 1980], oder aus Punktlageänderungen werden die relativen Horizontalbewegungen von Teilen der Erdoberfläche entlang von Verwerfungslinien in geologisch aktiven Gebieten abgeleitet [SNAY, CLINE 1980]. Technische Überwachungsnetze dienen zur Berechnung von Setzungs-, Verschiebungs- und Formänderungsparametern [BRUNKEN 1981, FLOTRON 1981, MILEV 1981].

Die Objektänderung resultiert in der Regel aus dem komplexen Zusammenspiel einer Vielzahl von Einflußparametern. Die Zahl der Punkte, die das Objekt repräsentativ diskretisieren, ist jedoch begrenzt und eine Trennung aller Einflüsse mit rein geometrischen Methoden oft nicht möglich (Multilinearität). Außerdem führt ein Modell mit zu vielen Parametern zu Schwierigkeiten bei der Interpretation der Ausgleichungsergebnisse. Aus diesen Gründen ist man gezwungen, sich auf die vermutlich wesentlichsten Einflüsse zu beschränken und sie mit den Punktverschiebungen in einen relativ einfachen funktionalen Zusammenhang zu setzen. Diese Glättung und Abstraktion der tatsächlichen Objektänderung in einem Approximationsmodell $F(x)$ hat zur Folge, daß im funktionalen Modell Restglieder auftreten, die die Abweichungen des gewählten Modells von der tatsächlichen Objektänderung enthalten. Die Parameter x_i der Approximationsfunktion sind in einer Ausgleichung zu schätzen. Man kann sich daher den $n \times 1$ Vektor y der Koordinatendifferenzen zerlegt denken in den funktionalen Trendanteil $F(x)$, den $n \times 1$ Vektor z der Modellrestfehler und den aus Meßfehlern herrührenden $n \times 1$ Fehlervektor e

$$y = F(x) + z + e . \quad (3.1)$$

Die Anteile \mathbf{z} und \mathbf{e} sind, da sie aus unterschiedlichen Ursachen entstanden sind, stochastisch unabhängig. Einen solchen Ausgleichungsansatz für spezielle Deformationsprobleme findet man unter anderem bei GHITAU (1970), DIETRICH (1978) und PELZER (1980). Ohne a priori Annahmen über den Vektor \mathbf{z} ist das Problem nicht lösbar, da das Modell überparametrisiert ist. Man setzt daher voraus, daß die Funktion $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ so passend gewählt worden ist, daß die Modellrestfehler aus vielen einzelnen, räumlich unregelmäßig wirkenden Einflußkomponenten zusammengesetzt sind, die sämtlich den Erwartungswert Null haben. Unter dieser Voraussetzung kann man annehmen, daß die Restfehler oder Modellresiduen nach dem zentralen Grenzwertsatz eine einfache statistische Struktur aufweisen und zumindest genähert normalverteilt sind. Sie sind folglich stochastische Größen, die sich vollständig durch Erwartungswert und Varianz beschreiben lassen. Für den Erwartungswert wird aus dem oben genannten Grund $E(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ vorausgesetzt. Wegen seines stochastischen Verhaltens kann man den Vektor \mathbf{z} im Gegensatz zu den festen Parametern x_i , für die $\text{Var}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ gilt, auch als Vektor von Zufallsparametern bezeichnen. Der funktionale Zusammenhang (3.1) stellt damit ein gemischtes Modell dar.

Die Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{zz} hängt von der Wahl des deterministischen Modellansatzes $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ ab. Je stärker die Abstraktion ist, desto größer wird die Erhaltungsneigung der Modellrestfehler sein, was in einer Zunahme der Korrelationen zwischen benachbarten Punkten zum Ausdruck kommen muß. Ebenso wird mit zunehmendem Abstraktionsgrad die Schwankungsbreite der Abweichungen von der vermittelnden Funktion $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ zunehmen und damit die Varianz der Zufallsparameter. Die Abstraktion darf aber nicht so weit gehen, daß die Grundvoraussetzungen, nämlich $E\{\mathbf{z}\} = \mathbf{0}$, verletzt wird, das heißt funktionales und stochastisches Modell können sich nur in engen Grenzen gegenseitig ersetzen.

Durch die Wahl des funktionalen Modells und durch geeignete Annahmen über die Zufallsparameter muß gewährleistet sein, daß in dem Fehlervektor \mathbf{e} nur die aus den Meßfehlern stammenden Einflüsse enthalten sind. In einem Modell ohne Zufallsparameter bewirken die Vereinfachungen, die bei der Modellwahl getroffen werden müssen, ein Anwachsen der geschätzten Residuen $\hat{\mathbf{e}}$ und führen zu einem zu großen Wert für die a posteriori Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit. Das kann zur Folge haben, daß bei Anwendung von statistischen Tests Fehlschlüsse gezogen werden. Dieser Effekt soll durch die Einführung des Vektors \mathbf{z} von Zufallsparametern vermieden werden.

An die Stelle von Annahmen über mögliche weitere Einflußparameter und einer damit verbundenen Erweiterung des deterministischen Anteils $\mathcal{F}(x)$ treten Annahmen über das stochastische Verhalten der Modellrestfehler.

In der Ausgleichsrechnung und in der Statistik hat es sich als nützlich erwiesen, mit solchen Fiktionen zu arbeiten, die zwar nicht bis ins letzte Detail verifizierbar sind, die aber dennoch, wenn sie mit Geschick und Sachkenntnis gewählt werden, brauchbare Arbeitshypothesen darstellen.

3.1.1 Ausgleichungsansatz und Modellvoraussetzungen

Das den weiteren Betrachtungen zugrundeliegende lineare funktionale Ausgangsmodell für die Deformationsanalyse lautet

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{z} + \mathbf{e} . \quad (3.2)$$

Die auftretenden Größen haben folgende Bedeutung:

- \mathbf{y} - gegebener $n \times 1$ Vektor der Koordinatendifferenzen zwischen zwei Beobachtungsepochen
- \mathbf{x} - gesuchter $u \times 1$ Vektor der festen Parameter des Generalisierungsmodells für das Untersuchungsobjekt
- \mathcal{A} - bekannte $n \times u$ Koeffizientenmatrix mit $u < n$
- \mathbf{z} - unbekannter $n \times 1$ Zufallsvektor (Modellrestfehler); jeder Komponente des Vektors \mathbf{y} ist eine Komponente des Vektors \mathbf{z} zugeordnet
- \mathbf{e} - unbekannter $n \times 1$ Fehlervektor (Beobachtungsfehler) für die Koordinatendifferenzen

Bei nichtlinearer Ausgangsfunktion

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (2.201)$$

ist mit Näherungswerten zu linearisieren

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{A}d\mathbf{x} + \mathbf{z} + \mathbf{e} . \quad (2.202)$$

Man denke sich in dem Fall in (3.2) den Vektor \mathbf{y} durch $\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)$ und den Vektor \mathbf{x} durch $d\mathbf{x}$ ersetzt.

Die stochastischen Eigenschaften der auftretenden Größen werden im stochastischen Modell durch Erwartungswerte und Varianzen beschrieben. Dabei muß ein passendes Modell die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

- Die für die Netzausgleichungen herangezogenen Beobachtungen sind frei von groben Fehlern. Es wird wie üblich Normalverteilung angenommen. Gleiches gilt dann auch für die in (3.2) auftretenden Fehler e_i der Koordinatendifferenzen, also

$$E(e) = 0 \quad , \quad \text{Var}(e) = \sigma_0^2 Q_{ee} \quad (3.3)$$

$$e \sim N\{0, \sigma_0^2 Q_{ee}\} .$$

- Damit das Modell in der Form (3.2) anwendbar ist, muß der Erwartungswert der Modellrestfehler als bekannt vorausgesetzt werden. Wenn der deterministische Anteil der Objektänderungen vollständig durch den Term Ax beschrieben wird, so kann aufgrund der im Abschnitt 3.1 angestellten Überlegungen

$$E(z) = 0 \quad (2.12)$$

angenommen werden. Diese Voraussetzung wird durch ein geeignetes statistisches Testverfahren überprüft. Da das Testverfahren nur für normalverteilte Größe anwendbar ist, wird entsprechend der Argumentation im Abschnitt 3.1 vorausgesetzt, daß die Komponenten des Vektors z multivariat normalverteilt sind. Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Zufallsparemeter wird durch

$$\text{Var}(z) = \sigma_0^2 Q_{zz} \quad (3.4)$$

beschrieben,

$$z \sim N\{0, \sigma_0^2 Q_{zz}\} . \quad (3.5)$$

Während Q_{zz} a priori festgelegt wird, kann der Varianzfaktor σ_0^2 im Verlauf der Modellanalyse, wie gezeigt werden wird, aus der Ausgleichung heraus geschätzt werden. Er muß für $\sigma_0^2 Q_{ee}$ und für $\sigma_0^2 Q_{zz}$ identisch sein. Die Matrix Q_{zz} sei regulär, $\text{rg}(Q_{zz}) = n$, und vollständig bekannt.

- Die Vektoren \mathbf{z} und \mathbf{e} sind, da sie sich auf unterschiedliche Fehlerursachen zurückführen lassen, unkorreliert

$$\text{Kov}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \text{Kov}(\mathbf{e}, \mathbf{z}) = \mathbf{0} . \quad (3.6)$$

- Der Term \mathbf{Ax} ist eine deterministische Größe

$$E(\mathbf{Ax}) = \mathbf{Ax} \quad ; \quad \text{Var}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{0} . \quad (3.7)$$

- Für den Vektor der Koordinatendifferenzen ergeben sich aus den bisherigen Annahmen die folgenden Verteilungscharakteristika:

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{Ax} \quad ; \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz}) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y} \sim N\{\mathbf{Ax}, \sigma_0^2 (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz})\}$$

Mit der unter (2.4) genannten Beziehung gilt außerdem

$$\text{Var}(\mathbf{y} | \mathbf{z}) = \text{Var}(\mathbf{e}) = \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{ee} . \quad (3.9)$$

Da der Vektor \mathbf{y} die Differenz der Koordinatenvektoren aus zwei Epochen ist,

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} . \quad (3.10)$$

erhält man nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz die Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} der Koordinatendifferenzen

$$\mathcal{Q}_{ee} = \begin{pmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{y_1 y_1} & \mathcal{Q}_{y_1 y_2} \\ \mathcal{Q}_{y_2 y_1} & \mathcal{Q}_{y_2 y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_{y_1 y_1} + \mathcal{Q}_{y_2 y_2} - \mathcal{Q}_{y_1 y_2} - \mathcal{Q}_{y_2 y_1} . \quad (3.11)$$

Der Rang der Matrix \mathcal{Q}_{ee} richtet sich nach den Datums- und Konfigurationsdefekten, die bei den beiden Einzelausgleichungen bzw. bei der Gesamtausgleichung beider Epochen auftreten. Obwohl die Datums- und Konfigurationsdefekte theoretisch von Epoche zu Epoche variieren können, ist ein Vergleich der Koordinaten aus zwei Epochen nur sinnvoll, wenn sich die Koordinaten jeweils auf das gleiche Datum beziehen. Die Spaltenräume der Kofaktorenmatrizen beider Epochen haben dann dasselbe orthogonale Komplement, das auch auf den Spaltenraum der Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} der Koordinatendiffe-

renzen übertragen wird.

Bei einem Rangabfall der Matrix Q_{ee} sind in jedem Fall Art und Herkunft der Defekte sorgfältig zu analysieren, da in diesem Fall, wie im Kapitel 2.3 dargelegt, Bedingungen bezüglich der Koordinatendifferenzen existieren, die für die weiteren Untersuchungen und für die Modellwahl beachtet werden müssen. Diese Bedingungen müssen rekonstruiert werden, um den in (2.93) genannten Projektionsoperator, die $n \times n$ Matrix T_G , bilden zu können. Mit Hilfe dieses Operators wird das funktionale Ausgangsmodell (3.2) dann entsprechend (2.95) und (2.96) umgeformt in

$$y = Ax + T_G z + e \quad , \quad (3.12)$$

so daß die Restriktionen bezüglich der Komponenten des Vektors y auch in dem gemischten Modell erfüllt sind.

Um die Matrix T_G aufstellen zu können, werden nach (2.93) die Matrizen \mathcal{H} und \mathcal{G} benötigt. Die Matrix \mathcal{G} ergibt sich aus der Definition (2.73). Die Spalten der Matrix \mathcal{H} bilden eine orthogonale Basis im orthogonalen Komplement der Spaltenräume der Normalgleichungsmatrizen aus den Netzausgleichungen. Das orthogonale Komplement ist nach Voraussetzung für beide Epochen identisch $[S(\mathcal{H}) = S(w_{y_1 y_1})^\perp = S(w_{y_2 y_2})^\perp]$. Bei einer Gesamtausgleichung gilt $S(\mathcal{H}) = S(w_{yy})^\perp$, wenn w_{yy} die Normalgleichungsmatrix des Gesamtsystems ist.

Wird das Datum in beiden Epochen bzw. in der Gesamtausgleichung so gewählt, daß die Kofaktorenmatrizen minimale Spur besitzen (Pseudoinverse), so gilt $\mathcal{G} = \mathcal{H}$.

Die $n \times u$ Koeffizientenmatrix \mathcal{A} in (3.2) wird, wenn Punktverschiebungen zu generalisieren sind, immer vollen Spaltenrang haben, das heißt man wird das funktionale Modell so wählen, daß die Komponenten des Parametervektors x erwartungstreu schätzbare Größe sind. Für die weiteren Ableitungen wird deshalb

$$\text{rg}(\mathcal{A}) = u \quad (3.13)$$

vorausgesetzt.

Aus den Netzausgleichungen erhält man bei getrennten Ausgleichungen beider

Epochen mit

$${}_1s_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v})_1 + (\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v})_2}{n_1 - u_1 + n_2 - u_2} \quad (3.14)$$

und bei einer Gesamtausgleichung, z.B. mit identischen Punkten für beide Epochen, mit

$${}_1s_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{n - u} \quad (3.15)$$

eine Schätzung für die Varianz der Gewichtseinheit.

3.1.2 Gewichtung der Zufallsparameter

Für die Ausgleichung im gemischten Modell wird die Varianz-Kovarianz-Matrix des Zufallsvektors \boldsymbol{z} bzw. ihre Schätzung

$$\boldsymbol{S}_{zz} = s_0^2 \boldsymbol{Q}_{zz} \quad (3.16)$$

benötigt. Damit lautet bei Beschränkung auf reguläre Matrizen in der Modellformulierung (2.48) der Gewichtsansatz

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{ee} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_{zz} \end{pmatrix} \sim \frac{1}{s_0^2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{ee}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

und in der Modellformulierung (2.55) mit $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{P}_{yy} \sim \frac{1}{s_0^2} (\boldsymbol{Q}_{ee} + \boldsymbol{Q}_{zz})^{-1}. \quad (3.18)$$

Auf eine Unterscheidung in der Bezeichnung zwischen einer 'wahren' und einer geschätzten Gewichtsmatrix, etwa durch \boldsymbol{P} und $\hat{\boldsymbol{P}}$, wird hier verzichtet, da sich die jeweilige Bedeutung unmittelbar aus dem Zusammenhang ergibt.

Die Kofaktorenmatrix \boldsymbol{Q}_{ee} ist, wie bereits erläutert wurde, zuverlässig bekannt. Die Hypothesen, die bei der Konstruktion der zunächst noch unbekannt Matrix \boldsymbol{Q}_{zz} zugrunde gelegt werden, und die Auswirkungen von Änderungen der Gewichtung auf die Ausgleichungsergebnisse sind Gegenstand die-

ses Kapitels.

3.1.2.1 Die Struktur der Varianz-Kovarianz-Matrix für die Zufallsparameter

Die Komponenten des Vektors \mathbf{z} stellen die Realisationen eines mehrdimensionalen Zufallsprozesses an den Netzpunkten dar. Jedem Punkt des Netzes wird ein je nach Art der Untersuchung ein-, zwei- oder dreidimensionaler Subvektor $\mathbf{z}(\mathbf{r}_i)$ von \mathbf{z} zugeordnet mit \mathbf{r}_i als Ortsvektor, z.B.

$$\mathbf{z}(\mathbf{r}_i) = \begin{pmatrix} z_{x_i} \\ z_{y_i} \\ z_{z_i} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Alle Punkte zusammen bilden ein ortsabhängiges Zufallsvektorfeld

$$\{\mathbf{z}(\mathbf{r})\}, \quad (3.20)$$

das natürlich nicht nur an den Meßpunkten, sondern auch an jedem beliebigen anderen Punkt des Objekts definiert ist. Werden nun an diskreten Punkten die Beobachtungen y_i durchgeführt, so wirkt dieser Prozeß auf die Beobachtungswerte ein. Der Beobachtungsvektor \mathbf{y} beinhaltet deshalb eine Stichprobe oder eine Realisation des Prozesses. Die Werte, die diese Stichprobe zum Zeitpunkt der Messung angenommen haben, können in einer Ausgleichung, wenn die Verteilungseigenschaften des Prozesses bekannt sind, mit dem Vektor $\hat{\mathbf{z}}$ geschätzt werden.

Da die unbekanntes Verteilungseigenschaften theoretisch nur aus unendlich vielen Realisierungen abgeleitet werden können, müssen Vereinfachungen im Hinblick auf eine praktikable Anwendung eingeführt werden, die hier auf der Basis der Theorie stochastischer Prozesse [z.B. PAPOULIS 1965, PUGACHEV 1965] kurz referiert werden sollen. Die Schätzfunktionen (2.128), die den Vektor $\hat{\mathbf{z}}$ als lineare Funktion aller Beobachtungen y_i darstellt, ist streng nur dann gerechtfertigt, wenn die Zufallsgrößen multivariat normalverteilt sind (Gaußscher Prozeß). Ist diese Bedingung zumindest genähert erfüllt, reichen zur vollständigen Beschreibung des Zufallsprozesses die Momente erster Ordnung (Erwartungswerte) und zweiter Ordnung (Varianzen, Kovarianzen) aus. Zu Beginn des dritten Kapitels wurde schon aufgezeigt, daß

diese Arbeitshypothese in vielen Fällen gerechtfertigt ist.

Als weitere Vereinfachung wird vorausgesetzt, daß das Zufallsvektorfeld statistisch homogen und mittelwert-ergodisch ist, woraus folgt, daß der Erwartungswert gebildet über alle Realisationen an einem Punkt gleich dem Erwartungswert gebildet aus einer Realisation über alle Punkte ist. Der Erwartungswert ist also ortsunabhängig:

$$E[\mathbf{z}(\mathbf{r}_i)] = E[\mathbf{z}(\mathbf{r}_i + \Delta)] = \text{const} \quad (3.21)$$

Wegen der Trendabspaltung in dem gemischten Modell kann überall

$$E(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

vorausgesetzt werden.

Neben der Mittelwert-Ergodizität wird die Kovarianz-Ergodizität unterstellt, die besagt, daß die Kovarianzen aus einer einzigen Realisation des Vektorfeldes geschätzt werden können. Die Elemente der Varianz-Kovarianz-Matrix für die Stützstellen sind in dem Fall nicht von der Lage der Punkte, sondern nur von dem Verbindungsvektor $\Delta \mathbf{r}_{ij}$ abhängig. Die Varianzen ($\Delta \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0}$) sind für alle Punkte gleich, können aber für verschiedene Komponenten (den Koordinatenrichtungen) unterschiedliche Beträge annehmen:

$$\begin{aligned} q_{ii}^{(kk)} &= q_{jj}^{(kk)} && (k = x, y, z) \\ &= q^{(kk)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Fordert man für das Vektorfeld zusätzlich die Eigenschaft der Isotropie, so sind die Kovarianzen zwischen zwei Punkten nur eine Funktion des Abstandes $d_{ij} = |\Delta \mathbf{r}_{ij}|$ der betrachteten Punkte. Das hat die Symmetrie der Kofaktorenmatrix zur Folge

$$\mathbf{Q}_{zz} = \mathbf{Q}_{zz}^T . \quad (3.23)$$

Mit den bisher genannten Annahmen streben darüberhinaus die Punktkorrelationen mit wachsendem Abstand gegen Null

$$q_{ij} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad d_{ij} \rightarrow \infty , \quad (3.24)$$

und zwischen den Haupt- und Nebendiagonalelementen gilt wie üblich die Be-

ziehung

$$q_{ij}^2 \leq q_{ii} \cdot q_{jj} \quad (3.25)$$

Korrelationen zwischen auf die gleiche Koordinatenachse bezogenen Komponenten des Vektorfeldes werden als Autokorrelationen bezeichnet und Korrelationen zwischen verschiedenartigen Komponenten als Kreuzkorrelationen. In einem reinen Autokorrelationsfeld verschwinden alle Kreuzkorrelationen

$$q_{ij}^{(kl)} = 0 \quad , \quad (k,l = x,y,z; k \neq l) \quad (3.26)$$

Varianz-Kovarianzmatrizen, die diese Kriterien erfüllen, können über analytische Funktionen erzeugt werden. Dabei ist es ausreichend, zunächst nur die Korrelationsmatrix \mathcal{K}_{zz} zu konstruieren. Die Korrelationskoeffizienten r_{ij} nehmen Beträge zwischen -1 und +1 an und sind wegen (3.22) und (3.26) definiert durch:

$$r_{ij}^{(kl)} = \frac{q_{ij}^{(kl)}}{\sqrt{q_{ii}^{(kk)} \cdot q_{jj}^{(ll)}}} = \begin{cases} \frac{q_{ij}^{(kk)}}{q_{ii}^{(kk)}} & \text{für } k=l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} \quad (3.27)$$

Die Elemente $r_{ij}^{(kk)}$ sind in einem homogenen isotropen Vektorfeld Funktionen des Punktabstandes d_{ij} und lassen sich aus einer Korrelationsfunktion

$$r^{(kk)} = f^{(k)}(d) \quad (3.28)$$

berechnen. Ein Feld mit diesen Eigenschaften (3.27) hat automatisch eine Taylor-Karman-Struktur mit gleichen Längs- und Querkorrelationsfunktionen bezogen auf die Verbindungslinie zweier Punkte. Allgemein gilt für ein zweidimensionales Feld mit Taylor-Karman-Struktur (gleich große Fehlerkreise an allen Punkten), wenn $r^{(p)}(d)$ die Längskorrelationsfunktion in Richtung der Verbindung zweier Punkte und $r^{(n)}(d)$ die Querkorrelationsfunktion für die dazu senkrechte Richtung darstellt, mit α als Richtungswinkel und P_i nach P_j [GRAFAREND 1975]:

$$\begin{aligned}
r_{ij}^{(xx)} &= r^{(n)}(d) + [r^{(p)}(d) - r^{(n)}(d)] \sin^2 \alpha \\
r_{ij}^{(yy)} &= [r^{(p)}(d) - r^{(n)}(d)] \sin \alpha \cos \alpha \\
r_{ij}^{(yy)} &= r^{(n)}(d) + [r^{(p)}(d) - r^{(n)}(d)] \cos^2 \alpha \\
r_{ii}^{(xx)} &= r_{ii}^{(yy)} = r^{(n)}(0) ; r_{ii}^{(xy)} = 0
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

Um die genannten Eigenschaften der Varianz-Kovarianz-Matrix zu gewährleisten, sind nur positiv-definite Funktionen [BÄHR, RICHTER 1975] zulässig. Vier Beispiele für häufig in der Literatur genannte Korrelationsfunktionen seien hier angeführt:

a) Lineare Abnahme der Korrelation

$$r = \begin{cases} \frac{c-d}{c} & \text{für } d \leq c \\ 0 & \text{für } d > c > 0 \end{cases}
\tag{3.30}$$

b) Hirvonensche Formel

$$r = \frac{1}{1 + (cd)^2}
\tag{3.31}$$

c) Exponentielle Abnahme der Korrelationen

$$r = e^{-(cd)^2}
\tag{3.32}$$

d) Gedämpfte Schwingung (hier können auch negative Korrelationen auftreten)

$$r = \frac{\text{sinc } cd}{cd} , c > 0
\tag{3.33}$$

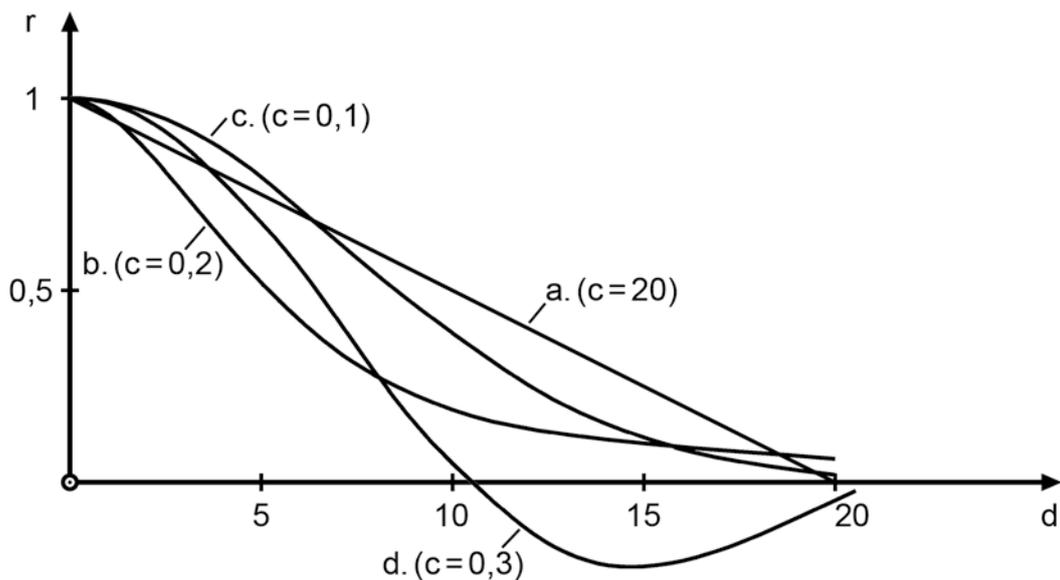


Abbildung 3 Kurvenverlauf der Korrelationsfunktionen

Der Wert des Parameters c bestimmt jeweils das Maß der Abnahme der Korrelation mit dem Abstand d und den Grenzabstand d_{\max} , ab dem die Korrelationen verschwinden oder vernachlässigbar klein werden.

Unter gewissen günstigen Voraussetzungen kann die Korrelationsfunktion aus den Meßergebnissen geschätzt werden. In einer vorläufigen Ausgleichung wird von den Beobachtungen der Trend abgespalten. Die verbleibenden Residuen $\bar{v} = \hat{z} - v$ werden gedanklich als eine Realisation des aus $\{z\}$ und $\{e\}$ zusammengesetzten Zufallsprozesses angesehen. Die empirische Varianz kann getrennt für die Komponenten in x, y und z Richtung nach der Formel

$$s_0^2 \bar{q}^{(kk)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{z}_k - v_k)_{r_i}^2 \quad \begin{array}{l} (k = x, y, z ; \\ m - \text{Anzahl aller Punkte ;} \\ r_i - \text{Ort des Punktes } P_i) \end{array} \quad (3.34)$$

berechnet werden. Für die Punkte des Netzes werden Entfernungsklassen gebildet und für jede Klasse wird die empirische Kovarianz geschätzt durch

$$s_0^2 \bar{q}_{d_L}^{(kk)} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\hat{z}_k - v_k)_{r_i} (\hat{z}_k - v_k)_{r_i+d_L} \cdot \quad \begin{array}{l} (k = x, y, z ; \\ p = \text{Anzahl der} \\ \text{Punkte mit dem} \\ \text{Abstand } d_L \text{ in} \\ \text{der Klasse } L) \end{array} \quad (3.35)$$

Trägt man diese Kovarianzwerte über die Entfernung in einem Diagramm auf, so kann eine Entscheidung über die zweckmäßige Form der Kovarianzfunktion getroffen werden und die Parameter der Funktion können in einer Ausgleichung geschätzt werden. Für jede Komponente $k = x, y, z$ erhält man auf diese Weise eine eigene Kovarianzfunktion.

Dieses Verfahren führt nur dann zum Ziel, wenn die Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} eine Diagonalmatrix ist, also durch die Meßfehler keine zusätzlichen Korrelationen zwischen den Punkten erzeugt werden. Die unter (3.35) abgeleiteten Kovarianzschätzungen sind dann von den Meßfehlern unbeeinflusst und die Funktionswerte an der Stelle $d = 0$ der ausgleichenden Kovarianzfunktionen liefern die von (3.34) abweichenden Werte für die empirischen Varianzen der Komponenten des Zufallsvektors \mathbf{z} . Über eine Normierung der Kovarianzfunktionen gelangt man zu den Korrelationsfunktionen.

Damit die empirische Ermittlung der Korrelationsfunktionen brauchbare Ergebnisse liefert, muß die Anzahl der zur Verfügung stehenden Punkte für die Mittelbildung in (3.34) und (3.35) ausreichend groß sein. Diese Forderung ist besonders in lokalen geodätischen Deformationsnetzen nur in den seltensten Fällen erfüllt. Außerdem ist die Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} aufgrund algebraischer Korrelationen nahezu immer voll besetzt, so daß auch von daher der oben beschriebene Weg nicht gangbar ist. Die Korrelationsfunktion ist deshalb auf den Einzelfall bezogen auf der Grundlage vernünftiger Annahmen zu konstruieren.

Die Größe der Punktkorrelationen hängt von der Güte des Trendmodells ab. Garantiert das gewählte Modell eine gute Beschreibung der aufgetretenen Objektänderungen und sind die Netzknoten annähernd homogen über das Untersuchungsobjekt verteilt, so wird in vielen praktischen Fällen der Grenzabstand d_{\max} nicht überschritten werden und alle Korrelationen können für vernachlässigbar klein angesehen werden, d.h. es kann $\mathcal{K} = \mathbf{E}$ gesetzt werden.

Bei Punktkonzentrationen an bestimmten Stellen des Netzes oder bei starren Verbindungen von einzelnen Punkten aufgrund der physikalischen Eigenschaften des Mediums, in das die Punkte eingebracht worden sind, können mit Hilfe einer Korrelationsfunktion die Korrelationskoeffizienten zwischen den Punkten konstruiert werden. Es können auch unterschiedliche Korrelationsmodelle für verschiedene Netzteile angewandt werden.

Korrelationen sind immer dann anzunehmen, wenn nach Abspaltung des Trends gleichartige lokal begrenzte Abweichungen mehrerer Punkte vermutet werden können.

Die Korrelationsmatrix läßt sich in die Varianz-Kovarianz-Matrix transformieren, indem die zu den einzelnen Komponenten gehörenden Zeilen mit konstanten Faktoren $c^{(k)}$ multipliziert werden:

$$c^{(k)} \cdot r_{ij}^{(kk)} = s_{ij}^{(kk)} = s_0^2 q_{ij}^{(kk)} \quad (k = x, y, z) \quad (3,36)$$

$$c^{(k)} = (s_{ii}^{(kk)})^2 = s_0^2 q_{ii}^{(kk)}$$

Die Konstanten können, wie im Kapitel 3.2 gezeigt werden wird, aus der Ausgleichung heraus geschätzt werden.

Bei horizontal ausgedehnten zwei- oder dreidimensional beobachteten Netzen, z.B. für geotektonische Untersuchungen, wird man in der Regel die x- und y-Komponenten gleich behandeln können, d.h. ihnen denselben Varianzfaktor und dieselbe Korrelationsfunktion zuordnen können. Die Fehlersituation in der Lage aufgrund des Zufallsprozesses $\{z\}$ wird dann durch gleich große Fehlerkreise für Punktepaare mit entfernungsabhängigen Radien beschrieben.

Bei vertikal angeordneten Punkten, z.B. an Staumauern, ist es naheliegend, die in die Objektebene fallenden Komponenten zusammenzufassen.

Weist das Netz unterschiedliche Punktvermarkungen auf oder wird das Netz bei unterschiedlich genauen Zentrierungsmethoden beobachtet (z.B. Meßpfähler und Bodenpunkt mit Stativ), so wird man bei den vermuteten Varianzen der einzelnen Punkte differenzieren müssen. Diese Einflüsse können durch nachträgliche Zu- bzw. Abschläge an den auf eins normierten Hauptdiagonalewerten der Korrelationsmatrix berücksichtigt werden.

3.1.2.2 Einfluß von Gewichtsänderungen der Zufallsparameter auf die Ausgleichung

An dem regulären Ausgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y \\ 0_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{E} \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \hat{z} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{ee} & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{ee}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

soll der Einfluß von Änderungen der Matrix \mathcal{P}_{zz} algebraisch abgeleitet und anhand der gefundenen Formeln sollen einige allgemeingültige Schlußfolgerungen gezogen werden.

Entsprechend den beiden Beobachtungsgruppen, dargestellt durch den Koordinatendifferenzvektor \mathbf{y} und den Vektor der Pseudobeobachtungen \mathbf{O}_z , wird auf die neuen Bezeichnungen

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} - \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{P}_2 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

übergegangen, deren Bedeutungen sich im Vergleich mit (3.37) erklären. Die zu der zweiten Beobachtungsgruppe gehörende Gewichtsmatrix $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{zz}$ soll nun um den Betrag $\Delta \mathcal{P}_2 = \Delta \mathcal{P}_{zz}$ verändert werden. Durch vorangestelltes Δ werden im folgenden die Unterschiede bezeichnet, die sich in einer Ausgleichung durch die Variation der Gewichtsmatrix um $\Delta \mathcal{P}_2$ ergeben. Das Problem wird von WOLF (1968, S. 166) behandelt und durch algebraische Umformungen des Normalgleichungssystems gelöst. Die Lösungsformel für den Einfluß auf den Parametervektor $\hat{\mathbf{x}}$ lautet

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} = -\mathcal{N}_B^{-1} \mathbf{B}_2^T \Delta \mathcal{P}_2 (\mathbf{E} + \mathbf{B}_2 \mathcal{N}_B^{-1} \mathbf{B}_2^T \Delta \mathcal{P}_2)^{-1} \mathbf{v}_2, \quad (3.39)$$

in der \mathcal{N}_B die Normalgleichungsmatrix des ursprünglichen Systems (3.38) bezeichnet. Durch Rücksubstitution erhält man in der hier gewählten Notation

$$\begin{pmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \Delta \hat{\mathbf{s}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}\hat{x}} & Q_{\hat{x}\hat{s}} \\ Q_{\hat{s}\hat{x}} & Q_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \Delta \mathcal{P}_{zz} \left[\mathbf{E} + (\mathbf{0} \mathbf{E}) \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}\hat{x}} & Q_{\hat{x}\hat{s}} \\ Q_{\hat{s}\hat{x}} & Q_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \Delta \mathcal{P}_{zz} \right]^{-1} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.40)$$

und schließlich durch Ausmultiplikation

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} = -Q_{\hat{x}\hat{s}} \Delta \mathcal{P}_{zz} (\mathbf{E} + Q_{\hat{s}\hat{s}} \Delta \mathcal{P}_{zz})^{-1} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.41a)$$

$$\text{und } \Delta \hat{\mathbf{s}} = -Q_{\hat{s}\hat{s}} \Delta \mathcal{P}_{zz} (\mathbf{E} + Q_{\hat{s}\hat{s}} \Delta \mathcal{P}_{zz})^{-1} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.41b)$$

Gewichtsänderungen wirken sich also schon in erster Ordnung auf die Parameterschätzung aus. Über die Größenordnung der Änderungen der Parameter läßt sich anhand dieser Gleichungen jedoch kaum etwas sagen. Die Gleichungen können aber benutzt werden, um die Empfindlichkeit des Ergebnisses auf den

Einzelfall bezogen, in Abhängigkeit von der Gewichtsmatrix, numerisch zu untersuchen. Bei kleinen Änderungen $\Delta \mathcal{P}_{zz} = d\mathcal{P}_{zz}$ ergeben sich bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die einfachen Formeln

$$d\hat{x} \approx -Q_{\hat{x}\hat{s}} d\mathcal{P}_{zz} \hat{z} \quad (3.42a)$$

$$d\hat{s} \approx -Q_{\hat{s}\hat{s}} d\mathcal{P}_{zz} \hat{z} . \quad (3.42b)$$

Setzt man die Gleichung (3-41b) in Gleichung (3.41a) ein, so folgt die Beziehung

$$\Delta \hat{x} = Q_{\hat{x}\hat{s}} Q_{\hat{s}\hat{s}}^{-1} \Delta \hat{s} , \quad (3.43)$$

die unter Beachtung der Regeln für die Inversion von Blockmatrizen umgeformt werden kann in

$$\Delta \hat{x} = N_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} N_{\hat{x}\hat{s}} \Delta \hat{s}$$

$$\text{oder } \Delta \hat{x} = -\left(\mathcal{A}^T Q_{ee}^{-1} \mathcal{A}\right)^{-1} \mathcal{A}^T Q_{ee}^{-1} \Delta \hat{s} . \quad (3.44)$$

Diese Gleichung gibt an, in welcher Weise sich Änderungen der Zufallsparameter auf die Trendparameter auswirken, oder anders formuliert, in welcher Weise sich funktionales und stochastisches Modell gegenseitig beeinflussen.

Die Größenordnung der Änderung $\Delta \hat{x}$ hängt davon ab, wie regelmäßig sich die Änderungen $\Delta \hat{s}$ in bezug zur Trendkurve verteilen, und ist damit letztlich bestimmt durch die korrelativen Beziehungen der einzelnen Zufallsparameter \hat{s}_i untereinander, d.h. durch die a priori Korrelationsfunktion.

Zu dem Modell ohne Zufallsparameter gelangt man, indem man Q_{zz} gegen die Nullmatrix streben läßt. Wegen des Verschwindens der Zufallsparameter gilt $\Delta \hat{s} = -\hat{z}$. Eingesetzt in Gleichung (3.44) erhält man die Änderung des Vektors der Trendparameter $\Delta \hat{x}_{MF}$ beim Übergang vom gemischten zum festen Modell

$$\Delta \hat{x}_{MF} = \left(\mathcal{A}^T Q_{ee}^{-1} \mathcal{A}\right)^{-1} \mathcal{A}^T Q_{ee}^{-1} \hat{z} , \quad (3.45)$$

eine Beziehung, die man auch aus Gleichung (2.164) herauslesen kann. Bei einer guten Trendabspaltung sind in den Modellrestfehlern keine großräumig wirkenden Systematiken mehr enthalten, so daß die Komponenten von $\Delta \hat{x}_{MF}$

sehr kleine Beträge annehmen werden.

Die Unterschiede zwischen dem festen und dem gemischten Modell manifestieren sich nicht so sehr in unterschiedlichen Ergebnissen für die Trendparameter, sondern in den Diskrepanzen der a posteriori Varianzschätzungen (s. Kapitel 2.4.3) und der Kofaktorenmatrizen für den Parametervektor \hat{x} . Dadurch können sich auch sehr unterschiedliche Werte für die quadratischen Formen der Parameter in beiden Modellen ergeben.

Die Gewichtsmatrix \mathcal{P}_{zz} bestimmt das Verhältnis, in dem die Gesamtresiduen $\bar{v}_i = v_i - \hat{z}_i$ auf die beiden Anteile \hat{z}_i und v_i aufgeteilt werden, wie an folgender Gleichung, die aus (2.129) und (2.139) resultiert, zu erkennen ist:

$$\Delta v = \mathcal{A} \Delta \hat{x} + \Delta \hat{z} \quad (3.46)$$

Die Änderung des Vektors der Gesamtverbesserungen \bar{v} ist proportional zu $\Delta \hat{x}$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{v} &= -\Delta \hat{z} + \Delta v \\ &= +\mathcal{A} \Delta \hat{x} \end{aligned} \quad (3.47)$$

und bleibt in der Regel klein.

Für die Änderung der Kofaktorenmatrix der Unbekannten leitet WOLF (1968, S. 166) mit den in (3.38) benutzten Bezeichnungen den Ausdruck

$$\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} + \Delta \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} - \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{B}_2^T \Delta \mathcal{P}_2 \left(\mathbf{E} + \mathcal{B}_2 \mathcal{N}_B^{-1} \mathcal{B}_2^T \Delta \mathcal{P}_2 \right)^{-1} \mathcal{B}_2 \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \quad (3.48)$$

ab, so daß sich übertragen auf das gemischte Modell in der Darstellung (3.37) die veränderte Kofaktorenmatrix

$$\mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} + \Delta \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{x}} & \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{s}} \\ \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \end{pmatrix} \Delta \mathcal{P}_{zz} (\mathbf{E} + \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}} \Delta \mathcal{P}_{zz})^{-1} (\mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{x}} \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}}) \quad (3.49)$$

einstellt. Wie bei der Parameterschätzung tritt $\Delta \mathcal{P}_{zz}$ schon in erster Ordnung auf. Die Größenordnung des Einflusses der Gewichtsänderung läßt sich nur auf den Einzelfall bezogen angeben. Generell kann man sagen, daß mit wachsenden Gewichten die Kofaktoren für die Parameter kleiner werden und umgekehrt. Die Genauigkeit der Parameter wird durch die Matrix $s_0^2 \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ ge-

geschätzt. Wie an der unten abgeleiteten Gleichung (3.58) zu erkennen ist, weisen die Änderungen von \mathcal{P}_{zz} und s_0^2 gleiches Vorzeichen auf, so daß sich beide Effekte in einem gewissen Grade gegenseitig aufheben. Dennoch kann die Struktur der a posteriori Varianz-Kovarianz-Matrix durch einen falschen Gewichtsansatz erheblich gestört sein.

Um den Einfluß der Gewichtsänderung auf die quadratische Form der Residuen abzuschätzen, werden zunächst einige Relationen, bezogen auf den Verbesserungsvektor $(\boldsymbol{v}^T \hat{\boldsymbol{z}}^T)$, angegeben, die sich aus der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben. Der in dem Gauß-Markoff-Modell (3.37) geschätzte Verbesserungsvektor erfüllt die Bedingungen

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{P}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man daraus die beiden Beziehungen

$$\mathcal{A}^T \mathcal{P}_{ee} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad (3.51)$$

$$\text{und } \mathcal{P}_{ee} \boldsymbol{v} + \mathcal{P}_{zz} \hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Setzt man die zweite Relation in die erste ein, so folgt

$$\mathcal{A}^T \mathcal{P}_{zz} \hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}. \quad (3.53)$$

Die quadratische Form der Verbesserungen in dem Modell mit geänderter Gewichtsmatrix lautet

$$\Omega + d\Omega = (\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})^T \mathcal{P}_{ee} (\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) + (\hat{\boldsymbol{z}} + d\hat{\boldsymbol{z}})^T (\mathcal{P}_{zz} + d\mathcal{P}_{zz}) (\hat{\boldsymbol{z}} + d\hat{\boldsymbol{z}}), \quad (3.54)$$

wobei für die folgenden Ableitungen nur kleine Änderungen $d\mathcal{P}_{zz}$ betrachtet werden sollen. Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung erhält man durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} \Omega + d\Omega &= \boldsymbol{v}^T \mathcal{P}_{ee} \boldsymbol{v} + \hat{\boldsymbol{z}}^T \mathcal{P}_{zz} \hat{\boldsymbol{z}} \\ &+ 2\boldsymbol{v}^T \mathcal{P}_{ee} d\boldsymbol{v} + \hat{\boldsymbol{z}}^T d\mathcal{P}_{zz} \hat{\boldsymbol{z}} \\ &+ 2\hat{\boldsymbol{z}}^T d\mathcal{P}_{zz} \hat{\boldsymbol{z}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Setzt man die Gleichungen (3.46) und (3.52) ein, so findet man

$$\begin{aligned}
 \Omega + d\Omega &= \Omega \\
 &- 2\hat{z}^T \mathcal{P}_{zz} \mathcal{A} d\hat{x} + \hat{z}^T d\mathcal{P}_{zz} \hat{z} \\
 &- 2\hat{z}^T \mathcal{P}_{zz} d\hat{z} + 2\hat{z}^T \mathcal{P}_{zz} d\hat{z} .
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Wegen (3.53) gilt schließlich für kleine Änderungen $d\mathcal{P}_{zz}$ die einfache Beziehung

$$\Omega + d\Omega = \Omega + \hat{z}^T d\mathcal{P}_{zz} \hat{z} . \tag{3.57}$$

Daraus resultiert der Einfluß der Gewichtsänderung $d\mathcal{P}_{zz}$ auf die a posteriori Varianzschätzung der Gewichtseinheit:

$$\begin{aligned}
 s_0^2 + ds_0^2 &= \frac{\Omega + d\Omega}{f} \\
 &= s_0^2 + \frac{\hat{z}^T d\mathcal{P}_{zz} \hat{z}}{f}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Es wird also in erster Annäherung nur die quadratische Form des Zufallsvektors \hat{z} beeinflusst.

3.2 Modellüberprüfung und Modellanpassung

Bei der Formulierung eines geeigneten mathematischen Modells zur Beschreibung der Deformationen sind anhand von vorläufigen Ausgleichungsergebnissen Entscheidungen zu treffen über Art und Zahl der signifikanten Parameter des Vektors x . Die Größenordnung der Modellrestfehler ist durch die Schätzung der in den Gleichungen (3.36) auftretenden Varianzfaktoren anzugeben. Außerdem ist zu prüfen, ob nicht Einzelpunktbewegungen, die weder dem funktionalen noch dem stochastischen Modell genügen, verfälschend auf das Ausgleichungsergebnis einwirken. Die betroffenen Punkte sind aus der Ausgleichung zu streichen oder müssen über eine Modellerweiterung gesondert behandelt werden. Verfahren zur Lösung der hier angesprochenen Probleme sind Gegenstand dieses Kapitels.

Die im Text beschriebenen Schritte bis zur endgültigen Modellfindung können anhand des Ablaufdiagramms (Abb. 4) in den Gesamtzusammenhang eingeordnet werden.

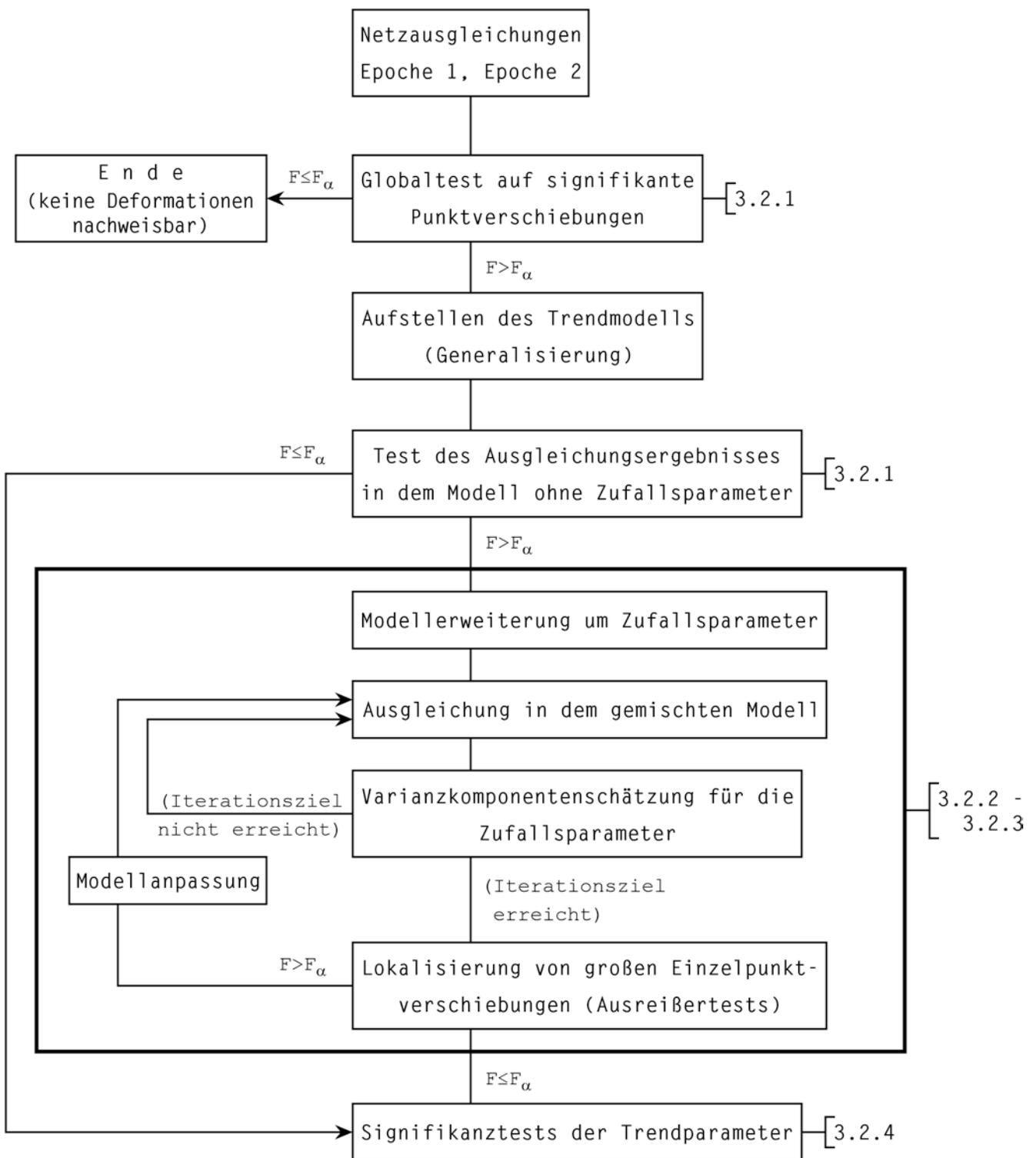


Abbildung 4 Ablaufdiagramm zur Modellanalyse im Zweiepochenmodell (die rechts stehenden Ziffern verweisen auf die Textkapitel)

3.2.1 Globaltest der Punktlageänderungen und der Verbesserungen im festen Gauß-Markoff-Modell

Wenn Zweifel an der Existenz von signifikanten Punktlageänderungen bestehen, kann über einen für alle Komponenten des Differenzenvektors \mathbf{y} gemeinsamen Globaltest vorweg untersucht werden, ob eine weitere Analyse überhaupt lohnt.

Es wird von der Nullhypothese ausgegangen, daß alle Punkte in ihrer Lage stabil geblieben sind und folglich $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{Q}_{zz} = \mathbf{0}$ gelten. Das Modell reduziert sich dann auf die Form

$$\mathbf{y} = -\mathbf{v} \quad , \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee} \quad . \quad (3.59)$$

Die quadratische Form der Residuen ist gleich der quadratischen Form des Differenzenvektors ($\mathbf{Q}_{ee}^- = \mathbf{Q}_{ee}^{-1}$, wenn $\text{rg}(\mathbf{Q}_{ee}) = n$) :

$$q_2 = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{ee}^- \mathbf{v} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_{ee}^- \mathbf{y} \quad (3.60)$$

Mit dem durch Spezialisierung von (2.180) bis (2.182) gegebenen Erwartungswert läßt sich die Nullhypothese zusammenfassen in

$$H_0 : E(q_2) = \sigma_0^2 f_2 \quad (3.61)$$

mit $f_2 = \text{rg}(\mathbf{Q}_{ee})$. Nach (2.183) hat die Zufallsvariable q_2 die Verteilung

$$\frac{1}{\sigma_0^2} q_2 \sim \chi^2[f_2, 0] \quad . \quad (3.62)$$

Mit der a posteriori Varianzschätzung ${}_1s_0^2$ aus den Netzausgleichungen mit insgesamt f_1 Freiheitsgraden läßt sich eine zweite unabhängige χ^2 -verteilte Größe bilden

$$\frac{{}_1s_0^2 \cdot f_1}{\sigma_0^2} \sim \chi^2[f_1, 0] \quad , \quad (3.63)$$

so daß der Quotient $\frac{q_2}{f_2 \cdot {}_1s_0^2} = \frac{{}_2s_0^2}{{}_1s_0^2}$ unter der Nullhypothese einer zentralen Fischerverteilung mit den Freiheitsgraden f_2 und f_1 angehört:

$$F = \frac{{}_2S_0^2}{{}_1S_0^2} \sim F_{(f_2, f_1)} \quad (3.64)$$

Die Größe ${}_2S_0 = \sqrt{\frac{q_2}{f_2}}$ wird von PELZER (1971) als mittlere Klaffung bezeichnet.

Vergleicht man den empirischen Wert F mit dem bei einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $S = 1 - \alpha$ zu bestimmenden Fraktilwert der F -Verteilung, so wird, wenn $F \leq F_{\alpha(f_2, f_1)}$ erfüllt ist, die Nullhypothese angenommen, das heißt, die festgestellten Koordinatendifferenzen resultieren allein aus den Meßfehlern.

Im anderen Fall, $F > F_{\alpha(f_2, f_1)}$, wird die Nullhypothese verworfen und es schließt sich eine weitergehende Analyse des Vektors \mathbf{y} an, z.B. durch die Wahl eines funktionalen linearen oder linearisierten Generalisierungsmodells \mathbf{Ax} . In diesem Stadium kann untersucht werden, ob eine Modellerweiterung durch die Zufallsparameter \mathbf{z} notwendig ist. Dazu wird von der Nullhypothese ausgegangen, daß die Objektänderungen durch das Modell

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} - \mathbf{v} \quad , \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee} \quad (3.65)$$

hinreichend beschrieben werden, also $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{Q}_{zz} = \mathbf{0}$ erfüllt sind. Die quadratische Form der Residuen lautet jetzt

$$q_3 = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v} = (\mathbf{y} - \mathbf{Ax})^T \mathbf{Q}_{ee}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{Ax}) \quad (3.66)$$

Die Nullhypothese läßt sich wieder unter Verwendung der Formeln (2.180) bis (2.182) formulieren durch

$$H_0 : E(q_3) = \sigma_0^2 f_3 \quad (3.67)$$

mit $f_3 = \text{rg}(\mathbf{Q}_{ee}) - u$.

Auf dem gleichen, zuvor beschriebenen Wege (3.62) bis (3.64) ist die Nullhypothese auf ihre Gültigkeit hin zu untersuchen. Muß die Nullhypothese wegen $F > F_{\alpha(f_3, f_1)}$ verworfen werden, so ist ein zusätzlicher Einfluß von zufällig wirkenden unregelmäßigen Punktlageänderungen oder von großen Einzelpunktdeformationen oder einer Kombination beider Deformationsarten zu vermuten, so daß entsprechende Modellerweiterungen notwendig werden.

3.2.2 Schätzung der endgültigen Varianz-Kovarianz-Matrix für die Zufallsparameter und Lokalisierung von Einzelpunktbewegungen

Wenn die Nullhypothese (3.67) verworfen werden muß, wird auf das gemischte Modell in der Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathcal{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\boldsymbol{\delta}} - \mathbf{v} & \mathbf{y} &= \mathcal{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathcal{J}_G\hat{\boldsymbol{\delta}} - \mathbf{v} \\ \mathbf{0}_z &= \hat{\boldsymbol{\delta}} - \hat{\boldsymbol{z}} & \mathbf{0}_z &= \hat{\boldsymbol{\delta}} - \hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad (3.68)$$

übergegangen, in der nun neben den Beobachtungen y_i der Nullvektor $\mathbf{0}_z$ formal als zweite Beobachtungsgruppe auftritt. Für die Varianz-Kovarianz-Matrix des Vektors \mathbf{y} liegt die Schätzung

$$\mathcal{S}_{yy} = {}_1s_0^2 \mathcal{Q}_{ee} \quad (3.69)$$

vor, während die Varianz-Kovarianz-Matrix der Pseudobeobachtungen nach Kapitel 3.1.2.1 nur bis auf einen noch unbekanntem Faktor c aufgestellt worden ist

$$\mathcal{S}_{\mathbf{0}_z\mathbf{0}_z} = {}_1s_0^2 \mathcal{Q}_{zz} = c \mathcal{K}_{zz} . \quad (3.70)$$

Der endgültige Wert für c kann nur iterativ über eine Varianzkomponentenschätzung für die Gruppe der Pseudobeobachtungen gefunden werden. Dabei wird wegen der günstigen Recheneigenschaften die von FÖRSTNER (1979) angegebene Schätzfunktion benutzt. Diese basiert auf der unter (2.186) abgeleiteten Beziehung

$$E\left(\hat{\boldsymbol{z}}^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{\boldsymbol{z}}\right) = \sigma_0^2 r_z \quad (2.186)$$

mit der als Redundanzanteil des Vektors $\mathbf{0}_z$ interpretierbaren Zahl $r_z = n - \text{tr}\left(\mathcal{Q}_{zz}^{-1} \mathcal{Q}_{\hat{\boldsymbol{\delta}}\hat{\boldsymbol{\delta}}}\right)$.

Aus einer ersten Ausgleichung mit einem Näherungswert c_0 für c wird wegen (2.186) eine a posteriori Schätzung für die Varianz der Gewichtseinheit allein aus den Verbesserungen $\hat{\boldsymbol{z}}$ der Pseudobeobachtungen gewonnen mit

$$s_0^2(\hat{\boldsymbol{z}})_1 = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{z}}^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{\boldsymbol{z}}}{r_z}\right)_0 . \quad (3.71)$$

In einem nächsten Iterationsschritt wird der verbesserte Wert für c

$$c_1 = \frac{s_0^2(\hat{z})_1}{{}_1s_0^2} c_0 \quad (3.72)$$

verwandt, so daß der Iterationsprozeß insgesamt durch die beiden Rekursionsformeln

$$s_0^2(\hat{z})_{v+1} = \left(\frac{\hat{z}^T Q_{zz}^{-1} \hat{z}}{r_z} \right)_v \quad \text{und} \quad c_{v+1} = \frac{s_0^2(\hat{z})_{v+1}}{{}_1s_0^2} \cdot c_v \quad (3.73)$$

mit v als Iterationsindex festgelegt ist. Die Iteration wird fortgesetzt, bis das Iterationsziel

$$s_0^2(\hat{z}) \rightarrow {}_1s_0^2 \quad (3.74)$$

erreicht ist bzw. eine vorher festgesetzte Schranke unterschritten wird.

Zur Berechnung von r_z ist die Spur des Matrizenprodukts $Q_{zz}^{-1} Q_{\hat{s}\hat{s}}$ zu berechnen. Aus der vollbesetzten Matrix $Q_{\hat{s}\hat{s}}$ werden dazu nur diejenigen Elemente benötigt, die auch in der Matrix Q_{zz}^{-1} besetzt sind, im unkorrelierten Fall [$Q_{zz} = \text{diag}(Q_{zz})$] also nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Sollen für die den verschiedenen Koordinatenachsen zugeordneten Zufallsparameter unterschiedliche Varianzen entsprechend (3.36) geschätzt werden, so wird der Iterationsprozeß für jede der maximal drei Varianzkomponenten parallel durchgeführt. Die quadratische Form des Vektors \hat{z} kann unter der Voraussetzung verschwindender Kreuzkorrelationen im dreidimensionalen Fall in die Summanden

$$\hat{z}^T Q_{zz}^{-1} \hat{z} = \hat{z}_x^T Q_{z_x z_x}^{-1} \hat{z}_x + \hat{z}_y^T Q_{z_y z_y}^{-1} \hat{z}_y + \hat{z}_z^T Q_{z_z z_z}^{-1} \hat{z}_z \quad (3.75)$$

und der Redundanzanteil entsprechend in

$$r_z = r_{z_x} + r_{z_y} + r_{z_z} \quad (3.76)$$

zerlegt werden mit $r_{z_k} = n_k - \text{tr}(Q_{z_k z_k}^{-1} Q_{\hat{s}_k \hat{s}_k})$ für $k = x, y, z$.

Der Iterationsprozeß wird dann allgemein beschrieben durch die Rekursionsformeln ($v = \text{Iterationsindex}, k = x, y, z$)

$$s_0^2(\hat{z}_k)_{v+1} = \left(\frac{\hat{z}_k^T Q_{z_k z_k}^{-1} \hat{z}_k}{r_{z_k}} \right)_v ,$$

$$(c_k)_{v+1} = \frac{s_0^2(\hat{z}_k)_{v+1}}{{}_1s_0^2} \cdot (c_k)_v \quad (3.77)$$

und das Iterationsziel

$$s_0^2(\hat{z}_k) \rightarrow {}_1s_0^2 . \quad (3.78)$$

Die Vorgehensweise bei den im Kapitel 3.1.2.1 angesprochenen Spezialfällen (z.B. $c_x = c_y \neq c_z$ oder $c_x \neq c_y = c_z$) oder bei reinen Lage- und Höhen-netzen ist aus dem Allgemeinfall ohne weiteres herzuleiten.

Testrechnungen (siehe Kapitel 5) haben in Übereinstimmung mit FÖRSTNER (1979) gezeigt, daß mit der hier benutzten Schätzfunktion (3.73) bzw. (3.77) das Iterationsziel nach drei bis fünf Iterationen erreicht wird. Nur wenn die Modellrestfehler verschwindend klein bleiben, so daß die Residuen allein aus den Meßfehlern erklärbar sind, ist keine Konvergenz zu erzielen. Der Quotient $s_0^2(\hat{z}_k)/{}_1s_0^2$ bleibt in jedem Schritt kleiner als eins und c_k strebt ebenso wie der Redundanzanteil richtigerweise gegen Null. Es ist also schon am Konvergenzverhalten zu erkennen, für welche Komponenten die zugehörigen Zufallsparameter z_k gleich Null gesetzt werden können.

Wenn nur ein einziger Faktor c zu schätzen ist, also bei Gleichbehandlung aller Komponenten von z , kann ein vereinfachtes, ebenfalls iteratives Schätzverfahren unter Umgehung der Matrix $Q_{\hat{z}\hat{z}}$ durchgeführt werden. Dazu wird von der Näherungsformel (3.58)

$$s_0^2 + ds_0^2 = s_0^2 + \frac{\hat{z}^T dP_{zz} \hat{z}}{f} \quad (3.58)$$

ausgegangen, in der s_0^2 die aus dem gemischten Modell erhaltene Varianz-schätzung der Gewichtseinheit darstellt. Diese muß im Endergebnis mit ${}_1s_0^2$ übereinstimmen. Im v -ten Iterationsschritt tritt die Differenz

$$(ds_0^2)_v = {}_1s_0^2 - (s_0^2)_v \quad (3.79)$$

auf. Für die Gewichtsmatrix $\mathcal{P}_{zz} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1}$ wird von Iterationsschritt zu Iterationsschritt jeweils eine Anpassung durch den Faktor k zugelassen, so daß sich die Änderungsmatrix wie folgt darstellt:

$$\begin{aligned} (d\mathcal{P}_{zz})_v &= (\mathcal{P}_{zz})_v - (\mathcal{P}_{zz})_{v-1} \\ &= k_v (\mathcal{P}_{zz})_{v-1} - (\mathcal{P}_{zz})_{v-1} \\ &= (k_v - 1) (\mathcal{P}_{zz})_{v-1} . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Setzt man (3.79) und (3.80) in (3.58) ein und löst nach k auf, so findet man mit

$$k_v = \frac{(ds_0^2)_v \cdot f}{\hat{z}^T (\mathcal{P}_{zz})_{v-1} \hat{z}} + 1 \quad (3.81)$$

die Rekursionsformel für den Faktor k_v , mit dem $(\mathcal{P}_{zz})_{v-1}$ für den jeweils nächsten Iterationsschritt zu multiplizieren ist

$$(\mathcal{P}_{zz})_v = k_v (\mathcal{P}_{zz})_{v-1} . \quad (3.82)$$

Die Iteration ist mit Erreichen des Iterationszieles

$$k_v \rightarrow 1 \quad \text{oder} \quad (ds_0^2)_v = 0 \quad (3.83)$$

beendet. Die Notwendigkeit der Iteration ergibt sich aus der Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in (3.58).

Dieses Verfahren führt ebenfalls nach wenigen Iterationen zum Ziel, wenn die Voraussetzungen für eine Anwendung gegeben sind und die Zufallsparameter modellrelevant sind.

Die Varianzschätzung für die Zufallsparameter kann jedoch verfälscht sein durch noch unentdeckte große Einzelpunktbewegungen, die nicht dem funktionalen Modellansatz gehorchen und die sich größenordnungsmäßig aus den durch die Matrix $s_0^2 \mathcal{Q}_{zz}$ definierten unregelmäßigen Punktbewegungen herausheben. Diese Einzelpunktbewegungen wirken sich in dem gemischten Modell wie Ausreißer aus, da die Modellvoraussetzung

$$E(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

verletzt ist. Eine Lokalisierung kann daher nach der Strategie der Ausreiserstests in Gauß-Markoff-Modellen erfolgen.

Es wird wieder von dem zugrundeliegenden Ausgleichungsansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{y} + \mathbf{v} &= \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\delta}} \\ \mathbf{0}_z + \hat{\mathbf{z}} &= \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\delta}} \end{aligned} \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

mit zunächst regulär vorausgesetzter Matrix \mathbf{Q}_{ee} ausgegangen. Wenn das Modell richtig formuliert ist, muß der Erwartungswert der Verbesserungen \hat{z}_i für die Pseudobeobachtungen gleich Null sein, das heißt, es ist die Nullhypothese

$$H_0 : E(\hat{\mathbf{z}}) = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

auf ihre Gültigkeit hin zu untersuchen. Als Testgröße wird die Zufallsvariable

$$F = \frac{\Omega_f - \Omega_{f-n_d}}{n_d} \bigg/ \frac{\Omega_{f-n_d}}{f - n_d} \quad (3.86)$$

benutzt, in der Ω_f die quadratische Form der Residuen in dem Ausgangsmodell (Freiheitsgrad f) und Ω_{f-n_d} die entsprechende quadratische Form nach Streichung der zu einem Punkt gehörenden Pseudobeobachtungsgleichungen bedeuten. Mit n_d wird die Anzahl der zu einem Punkt gehörenden Koordinatendifferenzen bezeichnet.

Unter der Nullhypothese hat die Zufallsvariable F eine zentrale F-Verteilung. Die Testgröße läßt sich für jeden Punkt ohne Neuausgleichung berechnen.

In einem eindimensionalen Netz ($n_d = 1$, Höhennetz) mit Korrelationen zwischen den Zufallsparametern kann die folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\Omega_{f-1} &= \Omega_f - \hat{z}^T Q_{ZZ}^{-1} e_i (e_i^T Q_{ZZ}^{-1} Q_{ZZ} Q_{ZZ}^{-1} e_i)^{-1} e_i^T Q_{ZZ}^{-1} \hat{z} \\
&= \Omega_f - \frac{(e_i^T Q_{ZZ}^{-1} \hat{z})^2}{e_i^T Q_{ZZ}^{-1} Q_{ZZ} Q_{ZZ}^{-1} e_i} \\
&= \Omega_f - u_i^2
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Der Vektor $e_i^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ dient als Auswahlvektor mit einer eins an der i -ten Stelle für den Punkt P_i . Anhand der angegebenen Formel läßt sich für jeden Punkt des Netzes der Wert der Zufallsvariablen u_i^2 berechnen, der die Abnahme der quadratischen Form der Residuen angibt, wenn in einer Neuausgleichung die zu einem Punkt P_i gehörende Pseudobeobachtung gestrichen wird (Freiheitsgrad $f-1$). Der Zusammenhang ergibt sich aus der bei HECK (1981) angegebenen Formel für korrelierte Beobachtungen in einem Gauß-Markoff-Modell. Die Verbesserungen v_i der Beobachtungen y_i treten wegen $\text{Kov}(\mathbf{y}, \mathbf{0}_z) = \mathbf{0}$ in (3.87) nicht in Erscheinung.

Wenn die Kofaktorenmatrix Q_{ZZ} eine Diagonalmatrix ist (keine Korrelationen zwischen den Zufallsparametern), gilt die vereinfachte Beziehung:

$$\begin{aligned}
\Omega_{f-1} &= \Omega_f - \frac{\hat{z}_i^2}{q_{\hat{z}_i \hat{z}_i}} \\
&= \Omega_f - u_i^2
\end{aligned} \tag{3.88}$$

In zwei- oder dreidimensionalen Netzen ist in (3.87) der Auswahlvektor e_i^T durch die Auswahlmatrix

$$s_i^T = (0, \dots, 0, E, 0, \dots, 0) \tag{3.89}$$

zu ersetzen mit einer $n_d \times n_d$ -Einheitsmatrix für den Punkt P_i ($n_d = 2, 3$).

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\Omega_{f-n_d} &= \Omega_f - \hat{z}^T Q_{ZZ}^{-1} s_i (s_i^T Q_{ZZ}^{-1} Q_{ZZ} Q_{ZZ}^{-1} s_i)^{-1} s_i^T Q_{ZZ}^{-1} \hat{z} \\
&= \Omega_f - u_i^2
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Die Berechnung von u_i^2 verlangt die Inversion der in der Klammer stehenden 2x2 bzw. 3x3 Matrix. Im unkorrelierten Fall folgt aus (3.90) die vereinfachte Beziehung

$$\begin{aligned}\Omega_{f-n_d} &= \Omega_f - \hat{\mathbf{z}}_{P_i}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_{P_i} \hat{\mathbf{z}}_{P_i}}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{P_i} \\ &= \Omega_f - u_i^2 \quad ,\end{aligned}\tag{3.91}$$

in der $\hat{\mathbf{z}}_{P_i}$ den zu dem Punkt P_i gehörenden Subvektor von $\hat{\mathbf{z}}$ und $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_{P_i} \hat{\mathbf{z}}_{P_i}}$ die entsprechende Submatrix von $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}}$ bezeichnen.

Mit $\Omega_f - \Omega_{f-n_d} = u_i^2$ und $\bar{s}_0^2 = \frac{\Omega_{f-n_d}}{f-n_d}$ ergibt sich in allen Fällen nach (3.86) die Testgröße ($n_d = 1, 2, 3$)

$$F = \frac{(u_i^2)_{\max}}{n_d \cdot \bar{s}_0^2} \quad ,\tag{3.92}$$

die für den Punkt mit dem größten Anteil u_i^2 zu bilden ist. Wird der mit den Freiheitsgraden n_d im Zähler und $f-n_d$ im Nenner bei einer vorzuziehenden Sicherheitswahrscheinlichkeit $S = 1 - \alpha$ zu bildende Fraktilwert der F-Verteilung überschritten

$$F > F_{\alpha(n_d, f-n_d)} \quad ,\tag{3.93}$$

so wird für diesen Punkt die Nullhypothese $E(\hat{\mathbf{z}}_{P_i}) = \mathbf{0}$ verworfen. Die zugehörigen Pseudobeobachtungen werden gestrichen. Das bedeutet, daß die vom Trend \mathbf{Ax} abweichenden Verschiebungskomponenten des Punktes P_i nun wie deterministische Größen, hier mit Δ_{P_i} bezeichnet, behandelt werden; im dreidimensionalen Fall gilt

$$\Delta_{P_i}^T = (\Delta_{x_i}, \Delta_{y_i}, \Delta_{z_i}) \quad .\tag{3.94}$$

Die in dem Ausgangsmodell (3.84) auftretenden Vektoren $\mathbf{0}_z$, $\hat{\mathbf{z}}$ und $\hat{\mathbf{s}}$ reduzieren sich um n_d -Komponenten. Ordnet man die Reihenfolge der Punkte so um, daß der lokalisierte Punkt an die erste Stelle zu stehen kommt, so nimmt das Modell (3.84) folgende Gestalt an mit $\bar{f} = f - n_d$ Freiheitsgraden ($\mathbf{E}, \mathbf{0}$ - Einheits- bzw. Nullmatrizen passender Ordnung) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \cdot \hat{\Delta}_{P_i} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \cdot \hat{\boldsymbol{s}} \\
\boldsymbol{0}_z + \hat{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}
\end{aligned}
\tag{3.95}$$

Gegenüber der ursprünglichen Matrix \boldsymbol{Q}_{zz} werden die zu dem Punkt P_i gehörenden Zeilen und Spalten gestrichen. Damit wird nach (3.84) die neue Gewichtsmatrix \boldsymbol{P} gebildet.

An die Lokalisierung schließt sich eine erneute Varianzkomponentenschätzung für die verbleibenden Pseudobeobachtungen in der beschriebenen Weise an und die Matrix \boldsymbol{Q}_{zz} wird entsprechend angepaßt. Darauf folgt ein weiterer Lokalisierungsversuch. Dieser Zyklus wird fortgesetzt bis unter den restlichen Punkten keine großen Einzelpunktverschiebungen mehr feststellbar sind. Nach jedem Schritt wird das funktionale Modell in Analogie zu (3.96) umgeschrieben und die Ordnung der Matrix \boldsymbol{Q}_{zz} entsprechen verkleinert.

Da die Komponenten des Vektors $\hat{\boldsymbol{z}}$ untereinander korreliert sind, ist es möglich, daß, wenn mehrere große Einzelpunktverschiebungen stattgefunden haben, die Testgröße erst in einem nachgeordneten Lokalisierungstest signifikant ausfällt. Daher ist in den ersten Schritten jeweils der Punkt mit dem größten Anteil, auch wenn die Signifikanzschwelle nicht überschritten wird, auszusortieren und ohne erneute Varianzschätzung in dem reduzierten Modell die Suche nach Ausreißern fortzusetzen. Auf diese Weise erhält man, wenn nach k Schritten F_α überschritten wird, die Kombination der k Punkte, die als Ausreißer zu betrachten sind. Erweisen sich, da in jedem Schritt die Nullhypothese bestätigt wird, alle Punkte als modellkonform, so kann das ursprüngliche Modell beibehalten werden.

Da im Prinzip jeder Punkt auf Signifikanz geprüft wird, handelt es sich um einen multiplen Test, bei dem die Sicherheitswahrscheinlichkeit $S_G = 1 - \alpha_G$ für die Gesamtheit aller Punkte kleiner ist als der für den einzelnen Test gewählte Wert $S = 1 - \alpha$. Es ist deshalb ratsam, in den Einzeltests mit einem kleinen Risiko, z.B. $\alpha = 0,1\%$, zu arbeiten. Das Gesamtrisiko ergibt sich für \bar{n} (Anzahl aller Punkte) aufeinanderfolgende, unabhängige Tests nach der Formel [SEBER 1977, S. 126]

$$S_G = 1 - \alpha_G = (1 - \alpha)^{\bar{n}} .
\tag{3.96}$$

Der Ausgleichungsansatz (3.84) ist äquivalent zu dem Ansatz

$$\mathbf{y} + \bar{\mathbf{v}} = \mathcal{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathcal{P}_{yy} = (\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz})^{-1} \quad . \quad (3.97)$$

In dieser Darstellung lautet die (3.90) entsprechende Berechnungsformel für $\Delta\Omega = u_i^2$:

$$\bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P}_{yy} \mathcal{S}_i (\mathcal{S}_i^T \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} \mathcal{P}_{yy} \mathcal{S}_i)^{-1} \mathcal{S}_i^T \mathcal{P}_{yy} \bar{\mathbf{v}} \quad (3.98)$$

Multipliziert man $\mathcal{Q}_{vv} = (\mathcal{Q}_{zz} + \mathcal{Q}_{ee}) - \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T$ von rechts und links mit \mathcal{P}_{yy} , so lassen sich die folgenden Beziehungen algebraisch ableiten:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} \mathcal{P}_{yy} &= \mathcal{P}_{yy} - \mathcal{P}_{yy} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{P}_{yy} \\ &= \mathcal{Q}_{zz}^{-1} (\mathcal{Q}_{zz} \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{zz} - \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{P}_{yy} \mathcal{A} \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathcal{A}^T \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{zz}) \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{aligned} \quad (3.99)$$

[unter Verwendung von (2.125):]

$$\mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} \mathcal{P}_{yy} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1} (\mathcal{Q}_{zz} - \mathcal{Q}_{\hat{s}\hat{s}}) \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \quad (3.100)$$

[unter Verwendung von (2.137):]

$$\mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} \mathcal{P}_{yy} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \mathcal{Q}_{\hat{z}\hat{z}} \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \quad (3.101)$$

Außerdem gilt

$$\mathcal{P}_{yy} \bar{\mathbf{v}} = - \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} \quad . \quad (3.102)$$

Setzt man (3.101) und (3.102) in (3.98) ein, so erweist sich, daß u_i^2 sowohl nach der in (3.90) als auch nach der in (3.98) angegebenen Formel berechnet werden kann. Das bedeutet, das Modell (3.95) führt zu demselben Ergebnis wie eine Ausgleichung mit dem Ansatz (3.97), in dem die zu dem Punkt P_i gehörenden Beobachtungsgleichungen gestrichen worden sind. Die sich auf diese Gleichung beziehenden Zeilen und Spalten der Kofaktorenmatrix $\mathcal{Q}_{yy} = \mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz}$ werden ebenfalls gestrichen. Aus diesem Grund tragen in dem System (3.95) die zu dem lokalisierten Punkt P_i gehörenden Komponenten des Differenzenvektors \mathbf{y} auch nichts zu dem Ausgleichungsergebnis bei, so daß im regulären Fall an die Stelle des Modells (3.95) ohne Änderung des Ergebnisses sofort das um den Punkt P_i reduzierte Ausgangssystem

(3.84) mit jetzt $\bar{f} = f - n_d$ Freiheitsgraden gesetzt werden kann. Bei mehreren lokalisierten Punkten wird die Streichung entsprechend fortgesetzt.

Ist die Matrix Q_{ee} singulär, so lautet das Ausgangssystem mit dem Freiheitsgrad $f = \text{rg}(Q_{ee}) - u$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} + \mathbf{v} &= \mathcal{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{T}_G \cdot \hat{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0}_z + \hat{\mathbf{z}} &= \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad , \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

Die Suche nach "Ausreißern" wird mit denselben Testgrößen und derselben Strategie wie im regulären Fall durchgeführt. Muß für einen Punkt die Nullhypothese $E(\hat{z}_{p_i}) = \mathbf{0}$ abgelehnt werden, werden die zu diesem Punkt gehörenden Modellabweichungen wieder wie deterministische Größen mit unbekanntem Erwartungswert behandelt. Die Matrix \mathcal{T}_G wird aufgespalten und umsortiert gemäß

$$\mathcal{T}_G = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{t}_G^\Delta & \mathbf{t}_G^S \end{array} \right] . \quad (3.104)$$

In der Matrix \mathbf{t}_G^Δ sind die zu dem lokalisierten Punkt P_i gehörenden Spalten der Matrix \mathcal{T}_G zusammengefaßt. Das veränderte Modell mit einem um n_d kleineren Freiheitsgrad ist dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} + \mathbf{v} &= \mathcal{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_G^\Delta \cdot \hat{\Delta} + \mathbf{t}_G^S \cdot \hat{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} + \hat{\mathbf{z}} &= \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad , \quad \mathcal{P} \quad (3.105)$$

Die Vektoren und Matrizen sind wieder so angeordnet, daß in der Punktreihenfolge der lokalisierte Punkt an erster Stelle steht. Die Pseudobeobachtungen werden nur für die restlichen Punkte angeschrieben. Entsprechend verkleinert sich die Matrix Q_{zz} um n_d Zeilen und Spalten.

Die wegen der Singularität von Q_{ee} in dem Modell enthaltenen Restriktionen $\mathcal{G}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ bezüglich \mathbf{y} bleiben erhalten.

Das System (3.105) kann auch in der Form

$$\mathbf{y} + \bar{\mathbf{v}} = \mathcal{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_G^\Delta \hat{\Delta} \quad , \quad \mathcal{P}_{yy} = (\bar{Q}_{ee} + \mathbf{t}_G^S Q_{zz} \mathbf{t}_G^{ST})^{-1} \quad (3.106)$$

geschrieben werden.

3.2.3 Globaltest der Zufallsparameter auf Modellrelevanz

Nach der Lokalisierung eines Punktes kann nach dem ersten sich anschließenden Iterationslauf für die Varianzkomponentenschätzung ohne Neuausgleichung geprüft werden, ob die Mitführung der Zufallsparameter noch erforderlich ist. Dazu wird die quadratische Form $\mathbf{z}^T \mathbf{Q}_{SS}^{-1} \mathbf{z}$ benötigt, die in einer Ausgleichung mit beliebiger Matrix \mathbf{Q}_{ZZ} berechnet werden kann. Die quadratischen Formen der Residuen Ω_M und Ω_F des gemischten und des festen Modells sind dann nach Gleichung (2.167) über

$$\Omega_M + \mathbf{z}^T \mathbf{Q}_{SS}^{-1} \mathbf{z} = \Omega_F \quad (3.107)$$

miteinander verknüpft. Mit der Testgröße (\bar{f} -Freiheitsgrad nach Lokalisierung)

$$F = \frac{\Omega_F}{{}_1s_0^2 \cdot \bar{f}} = \frac{{}_3s_0^2}{{}_1s_0^2} \quad (3.108)$$

wird wie im Kapitel 3.2.1 die Nullhypothese $H_0 : E(\Omega_F) = \sigma_0^2 \cdot \bar{f}$ getestet und bei Annahme direkt auf das feste Modell übergegangen.

3.2.4 Signifikanztests der Trendparameter durch Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche

An die Lokalisierung der nicht modellkonformen Einzelpunktverschiebungen und an die endgültige Bestimmung von \mathbf{Q}_{ZZ} schließen sich die Signifikanztests für die Trendparameter x_i an. Die Trennung der signifikanten von den nicht signifikanten Parametern ist wegen der verbesserten Interpretationsmöglichkeiten zweckmäßig.

Aus der Statistikk-literatur sind verschiedene Verfahren bekannt, um bei Regressionsaufgaben aus einer gegebenen Menge von Einflußgrößen mit den zugehörigen Parametern die optimale Kombination zu bestimmen. Das Problem ist nicht eindeutig lösbar, da wegen der Korrelationen mehrere von der Ausgleichung her gesehen gleichwertige Ergebnisse nebeneinander existieren können. Deshalb sind alle Verfahren pragmatischer Art und die jeweiligen Ergebnisse sind im Einzelfall kritisch zu interpretieren. BERK (1978) hat gezeigt, daß es keine objektiv beste Strategie gibt und daß die Unterschiede zwischen den Methoden vom praktischen Standpunkt betrachtet unbedeutend sind.

Lediglich in extremen Fällen, z.B. wenn einzelne Parameter wegen hoher Korrelationen gegenseitig ersetzbar sind, können größere Differenzen auftreten.

Am rechenaufwendigsten ist die Lösung, alle möglichen Kombinationen, das sind 2^u verschiedene Regressionen bei u Parametern, durchzurechnen (all possible subset regression). Anhand eines vorzugebenden Kriteriums, z.B. Minimierung der a posteriori Varianz der Gewichtseinheit, wird dann die endgültige Wahl getroffen. Daneben gibt es die schrittweise Regression, bei der in jedem Schritt das Modell um einen zusätzlichen Parameter erweitert wird und dann untersucht wird, welche der schon im Modell befindlichen Parameter wieder eliminiert werden können. Für die Aufnahme und Streichung der Parameter werden bestimmte an der F-Verteilung orientierte Schwellenwerte festgesetzt (stepwise regression). Eine vereinfachte Version dieser Strategie erhält man, wenn auf die Elimination einmal aufgenommener Parameter verzichtet wird (forward selection). Die Anwendung dieser Methode auf Probleme der Deformationsanalyse und ein möglicher Berechnungsalgorithmus sind in CASPARY/SCHWINTZER (1981) beschrieben worden. Es hat sich gezeigt, daß bei dieser Vorgehensweise in der endgültigen Kombination noch Parameter enthalten sein können, auf die, ohne daß sich die a posteriori Varianz der Gewichtseinheit signifikant ändert, verzichtet werden kann. Es wird deshalb hier ein Verfahren bevorzugt, das den umgekehrten Weg geht und ausgehend von dem vollständigen Modell mit allen in Frage kommenden Parametern schrittweise die sich als nicht signifikant erweisenden Parameter eliminiert (backward elimination). Eine Anwendung des Verfahrens findet man bei SCHWINTZER (1984). Zur Darstellung des Verfahrens und zur Erläuterung der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Regressionen mit unterschiedlicher Anzahl von Parametern wird von der Cholesky-Zerlegung der quadratischen Form der Parameter Gebrauch gemacht.

Da die u Parameter \hat{x}_i in der Regel untereinander korreliert sind, können sie nicht einzeln auf Signifikanz getestet werden. Die Analyse erfolgt anhand der quadratischen Form (2.159) $q_{\hat{x}} = \hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x}$.

Sollen sich die Signifikanzuntersuchungen statt auf alle u Komponenten nur auf n_x Komponenten des Vektors \hat{x} erstrecken, weil für einen Teil der Parameter die Signifikanz offensichtlich ist, so ist die quadratische Form nur mit dem zu untersuchenden $n_x \times 1$ Subvektor aus \hat{x} und der zugehö-

rigen Submatrix aus $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ zu bilden. In diesem Fall ist in den folgenden Ableitungen u durch n_x zu ersetzen.

Ziel der Analyse ist die Zerlegung der quadratischen Form in zwei unabhängige Anteile

$$q_{\hat{x}} = q_{\hat{x}_I} + q_{\hat{x}_{II}} \quad , \quad (3.110)$$

wobei der erste Summand aus den u_I signifikanten und der zweite Summand aus den u_{II} nicht signifikanten Parametern gebildet wird. Es gilt dann mit $E(\hat{x}_{II}) = x_{II} = \mathbf{0}$ nach (2.188) und (2.189)

$$E(q_{\hat{x}_{II}}) = E(\hat{x}_{II}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}_{II}\hat{x}_{II}}^{-1} \hat{x}_{II}) = \sigma_0^2 \cdot u_{II} \quad (3.111)$$

und

$$\frac{q_{\hat{x}_{II}}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2[u_{II}, 0] \quad . \quad (3.112)$$

Zunächst wird die gesamte quadratische Form wie folgt in u unkorrelierte Komponenten zerlegt.

Durch Cholesky-Zerlegung kann die Formmatrix $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}$ als Produkt zweier Dreiecksmatrizen ausgedrückt werden:

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (3.113)$$

Die obere Dreiecksmatrix \mathbf{C} entsteht durch Reduktion der Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}$ nach dem Gauß-Algorithmus und anschließender Division jeder Zeile durch die Wurzel des reduzierten Hauptdiagonalelements.

Definiert man

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}\hat{x} \quad (3.114)$$

als neuen Vektor von Zufallsvariablen, so läßt sich die quadratische Form umschreiben in die Quadratsumme der u Komponenten des Vektors \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}\hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} &= \hat{x}^T C^T C \hat{x} \\ &= \mathbf{r}^T \mathbf{r} = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_u^2\end{aligned}\tag{3.115}$$

Die Komponenten des Vektors \mathbf{r} sind untereinander unkorreliert und gleichgenau, wie die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (3.114) zeigt:

$$Q_{\mathbf{r}\mathbf{r}} = C Q_{\hat{x}\hat{x}} C^T = C (C^T C)^{-1} C^T = E\tag{3.116}$$

Jedem Parameter \hat{x}_i läßt sich eine Komponente des Vektors \mathbf{r} zuordnen. Folgende weitere Eigenschaften, die sich aus dem Verschwinden der Korrelationen und im Hinblick auf (2.160) und (2.169) ergeben, sind festzustellen:

- Die vorstehenden Komponenten r_i [$i=1, \dots, j$] ändern im Gegensatz zu den zugehörigen Parametern \hat{x}_i in einer Neuausgleichung ihren Wert nicht, wenn in der Reihenfolge weiter hinten stehende Parameter \hat{x}_k [$k = j+1, \dots, u$] aus der Ausgleichung eliminiert werden (Ausgleichung unter den Bedingungen $x_k = 0$ [$k = j+1, \dots, u$]).

- die Quadratsumme $\sum_{k=j+1}^u r_k^2$ ist gleich dem Anstieg der quadratischen Form der Residuen bei einer Neuausgleichung unter den Bedingungen $x_k = 0$ ($k = j+1, \dots, u$) oder, umgekehrt formuliert, die einzelnen Summanden r_i^2 bezeichnen in der Reihenfolge ihres Auftretens die Abnahme der quadratischen Form der Residuen bei Erweiterung des Modells um den jeweiligen Parameter x_i .

- Aus den genannten Eigenschaften folgt, daß die einzelnen Komponenten des Vektors \mathbf{r} von der Reihenfolge der Anordnung der Parameter \hat{x}_i in dem Parametervektor \hat{x} abhängen, also nicht invariant gegenüber Vertauschungen sind.

Es ist sinnvoll, die Parameter so zu ordnen, daß die Quadratsumme der Residuen um den jeweils kleinstmöglichen Betrag ansteigt, wenn der Parametervektor schrittweise um jeweils eine zusätzliche Komponente verkürzt wird. Der Eliminationsvorgang beginnt mit dem an die letzte Stelle getauschten Parameter und wird bis zu dem an der führenden Position stehenden Parameter fortgesetzt. Diese Festlegung führt zu der folgenden Strategie bei der Zer-

legung der quadratischen Form $\hat{x} Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x}$ (Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche):

Bei der Reduktion der Matrix $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}$ nach Cholesky entsteht als letztes Hauptdiagonalelement c_{uu} der Dreiecksmatrix \mathcal{C} die Wurzel aus dem Reziprokwert des zu dem letzten Parameter gehörenden Kofaktors,

$$c_{uu} = q_{uu}^{-1/2} . \quad (3.117)$$

Wegen $r_u = c_{uu} \hat{x}_u$ sind die Anteile $(r_u^2)_i$, die sich ergeben, wenn jeder Parameter nacheinander an die letzte Stelle gesetzt wird, einfach zu berechnen aus

$$(r_u^2)_i = \frac{\hat{x}_i^2}{q_{ii}} , \quad i = 1, \dots, u . \quad (3.118)$$

Die Kofaktoren q_{ii} sind die Hauptdiagonalelemente der Matrix $Q_{\hat{x}\hat{x}}$. Der Parameter, dessen Anteil minimal ausfällt,

$$(r_u^2)_k = \text{Min}[(r_u^2)_i] , \quad (3.119)$$

behält die letzte Position.

Bevor die vorletzte Stelle besetzt wird, wird gedanklich eine Neuausgleichung ohne den Parameter x_k durchgeführt. Mit der sich neu ergebenden Matrix $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{\infty}$ und der neuen Parameterschätzung \hat{x} können dann die für die vorletzte Position geltenden Beiträge der verbleibenden $u-1$ Parameter berechnet werden. Die $(u-1) \times (u-1)$ Matrix $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{\infty}$ und der $(u-1) \times 1$ Vektor \hat{x} können auch ohne Neuausgleichung aus den bisherigen Ergebnissen abgeleitet werden. Partitioniert man nämlich die Matrizen $Q_{\hat{x}\hat{x}}$, $Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}$ und den Vektor \hat{x} gemäß

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{pmatrix} Q_{rr} & q_{rk} \\ q_{rk}^T & q_{kk} \end{pmatrix} , \quad Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} N_{rr} & n_{rk} \\ n_{rk}^T & n_{kk} \end{pmatrix} , \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_k \end{pmatrix} , \quad (3.120)$$

so sind die reduzierten Kofaktorenmatrix und die neue Parameterschätzung aus den Beziehungen

$$Q_{\hat{x}\hat{x}}^{\infty} = N_{rr}^{-1} = Q_{rr} - q_{rk} \cdot q_{kk}^{-1} \cdot q_{rk}^T \quad (3.121)$$

und

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}_r + \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}} \cdot \boldsymbol{n}_{rk} \cdot \hat{x}_k \quad (3.122)$$

abzuleiten. Die quadratische Form der Parameter ist nach diesem ersten Schritt in zwei unkorrelierte Anteile aufgespalten

$$\hat{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{x}} + (r_u^2)_k \quad (3.123)$$

Die Formmatrix $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}}^{-1}$ ist durch \boldsymbol{N}_{rr} gegeben. Mit diesen Ergebnissen werden die Anteile

$$(r_{u-1}^2)_i = \frac{\hat{x}_i^2}{\bar{q}_{ii}} \quad , \quad i=1, \dots, k-1, k+1, \dots, u \quad (3.124)$$

berechnet, die die $u-1$ Parameter zu der quadratischen Form beitragen, wenn sie nacheinander an die vorletzte Stelle getauscht werden und x_k die letzte Position beibehält. Der Parameter mit dem kleinsten Anteil behält diese Position. Die Kofaktoren \bar{q}_{ii} sind die Hauptdiagonalelemente der Matrix $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}}$.

Ausgehend von $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}}$, $\hat{\boldsymbol{x}}$ und $\boldsymbol{N}_{rr} = \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}}^{-1}$ wird dann wie zuvor beschrieben die Reduktion weitergeführt, r_{u-2} berechnet und die drittletzte Position besetzt.

Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis der letzte Parameter abgearbeitet ist und die Anordnung der Komponenten im Parametervektor festliegt.

Eingesetzt in (3.115) ergibt sich die sortierte Folge der unkorrelierten, gleichgenauen Beiträge der einzelnen Parameter zu dem Gesamtwert der quadratischen Form, ohne daß die Dreiecksmatrix \boldsymbol{C} explizit berechnet werden muß. Da die Parameter untereinander korreliert sind, ist ihre Folge nicht unbedingt auch der Größe nach geordnet.

Für die Signifikanzuntersuchungen der u unabhängigen Komponenten r_i ist ein multipler Test durchzuführen, ausgehend von der Nullhypothese

$$H_0 : E(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0} \quad (3.125)$$

oder auf den transformierten Vektor bezogen

$$H_0 : E(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.126)$$

wegen $E(\mathbf{r}) = \mathbf{C} E(\hat{x})$. Da die Komponenten von \mathbf{r} unkorreliert sind, können sie einzeln auf Signifikanz untersucht werden. Unter der Nullhypothese hat jede Zufallsvariable $\frac{r_i^2}{\sigma_0^2}$ eine zentrale χ^2 -Verteilung

$$\frac{r_i^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2[1, 0] \quad , \quad (3.127)$$

so daß der Quotient $\frac{r_i^2}{{}_1s_0^2}$ einer F-Verteilung mit dem Freiheitsgrad eins im Zähler und f_1 Freiheitsgraden im Nenner angehört

$$F_i = \frac{r_i^2}{{}_1s_0^2} \sim F_{(1, f_1)} \quad . \quad (3.128)$$

Da bei einem multiplen Test im Prinzip jeder Parameter auf Signifikanz untersucht wird, ist, wenn von einem Gesamtrisiko α_G für einen Fehler 1. Art ausgegangen wird, der Fraktilwert

$$F_{\alpha(1, f_1)} \quad (3.129)$$

an der Stelle

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_G)^{1/u} \quad (3.130)$$

zu bilden [siehe (3.96)].

Mit dem an letzter Stelle stehenden Beitrag r_u^2 beginnend werden die nach (3.128) gebildeten Testgrößen nacheinander mit dem Fraktilwert verglichen, bis die Signifikanzschwelle, z.B. an der Stelle j , überschritten und die Alternativhypothese $E(\hat{x}_j) \neq 0$ angenommen wird. Da die Folge der r_i^2 sortiert ist, kann für alle noch folgenden davor stehenden Parameter, unabhängig von der Größe ihres Beitrages, ebenfalls angenommen werden, daß sie signifikant in die Ausgleichung eingehen.

Die restlichen $u-j$ Parameter können aus der Ausgleichung eliminiert werden, ohne daß sich die a posteriori Varianzschätzung der Gewichtseinheit signifikant ändert. Diese ergibt sich, ohne die Neuausgleichung explizit durchzuführen zu müssen, in dem veränderten Modell zu

$$\overline{s}_0^2 = \frac{\Omega_f + \sum_{i=j+1}^u r_i^2}{f+u-j} = \frac{\Omega_f + q_{\hat{x}_{II}}}{f+u-j} \quad (3.131)$$

mit einem um $u-j$ größeren Freiheitsgrad.

Die in ihrer Größenordnung sich ändernden Schätzwerte für die signifikanten Parameter x_i ($i=1, \dots, j$), zusammengefaßt in dem Vektor x_I , lassen sich in einer abschließenden Neuausgleichung berechnen. Sind alle Parameter in die Signifikanzuntersuchung einbezogen worden, so entsteht das endgültige Ergebnis für den verkürzten Parametervektor bereits im Zuge der Berechnung der Anteile r_i^2 .

Damit ist die Modellfindung abgeschlossen. Das endgültige Modell beinhaltet die signifikanten Generalisierungsparameter sowie Modellrestfehler, repräsentiert in der Kofaktorenmatrix Q_{zz} der Zufallsparameter, und berücksichtigt die signifikanten Einzelpunktverschiebungen.

3.3 Der Sonderfall einer Punktanalyse ohne Trendfunktion im Vergleich mit der Methode der Klaffungszерlegung

In speziellen Fällen, besonders bei Deformationsmessungen für geotektonische Untersuchungen, wenn nur kleine Deformationen zu erwarten sind und eine Bewegungssystematik nicht erkennbar ist, steht die Einzelpunktanalyse im Vordergrund. Diese zielt darauf ab, festzustellen, ob und an welchen Punkten signifikante Verschiebungen aufgetreten sind.

Das gemischte Modell für die Deformationsanalyse ist auch auf diese Betrachtungsweise anwendbar. In dem Ausgangsmodell (3.2) ist lediglich der Parametervektor x durch den Nullvektor zu ersetzen, so daß sich die folgenden Ausgleichungsansätze ergeben:

a) in der Darstellung nach Kapitel 2.2.2

$$\begin{array}{l}
 - Q_{ee} \text{ regulär} \\
 \mathbf{y} + \mathbf{v} = \hat{\mathbf{s}} \\
 \mathbf{0}_z + \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{s}}
 \end{array}
 , \mathcal{P} = \begin{pmatrix} Q_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{zz}^{-1} \end{pmatrix}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 - Q_{ee} \text{ singularär} \\
 \mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathcal{T}_G \hat{\mathbf{s}} \\
 \mathbf{0}_z + \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{s}}
 \end{array}
 , \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{zz}^{-1} \end{pmatrix}$$

(3.132)

b) in der Darstellung nach Kapitel 2.2.3

$$\mathbf{y} + \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} , \mathcal{P}_{yy} = (Q_{ee} + Q_{zz})^{-1}
 \quad \left| \quad
 \mathbf{y} + \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} , \mathcal{P}_{yy} = (\bar{Q}_{ee} + \mathcal{T}_G Q_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1}$$

(3.133)

Zwischen den quadratischen Formen können jetzt die folgenden Relationen durch Spezialisierung von (2.154) und (2.160) abgeleitet werden

($\bar{Q}_{ee} = Q_{ee}$, wenn Q_{ee} regulär) :

$$\text{zu a)} \quad \Omega = \mathbf{v}^T \bar{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^T Q_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{y}^T \bar{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{s}}^T Q_{ss}^{-1} \hat{\mathbf{s}}$$

(3.134)

$$\text{zu b)} \quad \Omega = \bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P}_{yy} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{y}^T \mathcal{P}_{yy} \mathbf{y}$$

Die Schätzfunktionen für die auftretenden Größen ergeben sich aus den im Kapitel 2.4 angegebenen Formeln, indem die sich auf den Parametervektor $\hat{\mathbf{x}}$ beziehenden Terme unberücksichtigt bleiben.

An (3.134) ist abzulesen), auf welche Weise durch die Einführung der Zufallsparameter (Darstellung a.) bzw. durch die Vergrößerung der Varianz der Koordinatendifferenzen (Darstellung b.) eine Abnahme der quadratischen Form der Residuen erzielt wird.

Die weitere Behandlung, Lokalisierung von Einzelpunktbewegungen und endgültige Schätzung der Kofaktorenmatrix Q_{zz} ergibt sich unmittelbar aus der in den Kapiteln 3.2.1 und 3.2.2 beschriebenen Vorgehensweise.

An dem regulären Modell in der Darstellung (3.133) sollen exemplarisch die bei der Lokalisierung eines Punktes auftretenden Zusammenhänge aufgezeigt werden, um einen Vergleich mit der gebräuchlichen Methode der Klaffungszerlegung [PELZER 1974] zu ermöglichen.

Nach der Lokalisierung eines Punktes wird das Modell (3.133) umgeschrieben in die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_B \\ \mathbf{y}_F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_B \\ \bar{\mathbf{v}}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \hat{\Delta}_B \quad (3.135)$$

Der Koordinatendifferenzenzvektor \mathbf{y} wird partitioniert in den Subvektor \mathbf{y}_B , der zu dem signifikant veränderten Punkt gehört, und den Subvektor \mathbf{y}_F für alle restlichen Punkte. In analoger Weise werden die Kofaktorenmatrizen und die Gewichtsmatrix partitioniert:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ee} &= \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{BB} & \mathcal{Q}_{BF} \\ \mathcal{Q}_{FB} & \mathcal{Q}_{FF} \end{pmatrix} & \bar{\mathcal{Q}}_{zz} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz} \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_{yy} &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{BB} & \mathcal{P}_{BF} \\ \mathcal{P}_{FB} & \mathcal{P}_{FF} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{Q}_{BB} & \mathcal{Q}_{BF} \\ \hline \mathcal{Q}_{FB} & \mathcal{Q}_{FF} + \mathcal{Q}_{zz} \end{array} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Der Parametervektor $\hat{\Delta}_B$ enthält die Komponenten der Einzelpunktverschiebungen und \mathbf{E} bzw. $\mathbf{0}$ sind Einheits- bzw. Nullmatrizen passender Ordnung. Die Schätzfunktion für $\hat{\Delta}_B$ ist nach Auflösung des aus (3.135) mit (3.136) zu entwickelnden Normalgleichungssystem gegeben durch

$$\hat{\Delta}_B = \mathbf{y}_B + \mathcal{P}_{BB}^{-1} \mathcal{P}_{BF} \mathbf{y}_F \quad (3.137)$$

Mit der Kofaktorenmatrix $\mathcal{Q}_{\hat{\Delta}_B \hat{\Delta}_B} = \mathcal{P}_{BB}^{-1}$ lautet die quadratische Form der Verschiebungsparameter

$$q_B = \hat{\Delta}_B^T \mathcal{P}_{BB} \hat{\Delta}_B \quad (3.138)$$

Aus

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_B \\ \bar{\mathbf{v}}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \hat{\Delta}_B - \begin{pmatrix} \mathbf{y}_B \\ \mathbf{y}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{BB}^{-1} \mathcal{P}_{BF} \mathbf{y}_F \\ -\mathbf{y}_F \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

läßt sich die quadratische Form der Residuen ableiten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{v}}_B^\top & \bar{\boldsymbol{v}}_F^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{BB} & \mathcal{P}_{BF} \\ \mathcal{P}_{FB} & \mathcal{P}_{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{v}}_B \\ \bar{\boldsymbol{v}}_F \end{pmatrix} &= \boldsymbol{y}_F^\top (\mathcal{P}_{FF} - \mathcal{P}_{FB} \mathcal{P}_{BB}^{-1} \mathcal{P}_{BF}) \boldsymbol{y}_F \\
&= \boldsymbol{y}_F^\top (\boldsymbol{Q}_{FF} + \boldsymbol{Q}_{ZZ})^{-1} \boldsymbol{y}_F
\end{aligned} \tag{3.140}$$

An der letzten Gleichung ist abzulesen, daß die Ausgleichung nach (3.135) mit (3.136) äquivalent zu einer Ausgleichung mit dem Ansatz

$$\boldsymbol{y}_F + \bar{\boldsymbol{v}}_F = \boldsymbol{0} \quad , \quad \mathcal{P} = (\boldsymbol{Q}_{FF} + \boldsymbol{Q}_{ZZ})^{-1} \tag{3.141}$$

ist.

Die Gleichungen (3.137) und (3.138) sind formal identisch mit den bei PELZER (1974) angegebenen Formeln zur Berechnung des Klaffungsanteils eines Punktes an der Gesamtklaffung $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{Q}_{ee}^{-1} \boldsymbol{y}$, und (3.140) stimmt formal mit der Formel zur Berechnung der verbleibenden Restklaffung für die übrigen Punkte überein. Unterschiede ergeben sich aber dadurch, daß in (3.136) bzw. (3.140) die Kofaktorenmatrix \boldsymbol{Q}_{ZZ} auftritt. Nur wenn sich in der Varianzkomponentenschätzung nach Kapitel 3.2.2 für \boldsymbol{Q}_{ZZ} die Nullmatrix ergibt (keine allgemeinen, zufällig wirkenden Punktlageänderungen feststellbar), stimmen beide Lokalisierungsverfahren in ihrem Endergebnis überein.

4. Erweiterung der Analyse von Punktlageänderungen auf die Bearbeitung mehrerer Epochen

Während bei der Zweiepochenanalyse von einer statischen Modellvorstellung ausgegangen wird, erlaubt die gemeinsame Bearbeitung mehrerer Beobachtungsepochen die Modellierung eines zeitabhängigen Bewegungsablaufs. Die Einflußgröße Zeit kann dabei direkt in dem Funktionsansatz erscheinen oder indirekt, indem die Bewegung als Funktion zeitlich sich ändernder physikalischer Einflußgrößen dargestellt wird (z.B. Stauhöhe oder Temperatur bei Staumauerüberwachungen). Zusätzlich zu der geometrischen Objektgeneralisierung tritt nun eine zeitliche Generalisierung der Bewegung des Objekts auf. Die zu verschiedenen diskreten Zeitpunkten ermittelten Koordinaten identischer Punkte bilden die Stützpunkte der abzuleitenden Bewegungsfunktion.

Wegen der aus der Generalisierung resultierenden Modellrestfehler wird auch für die Mehrepochenanalyse ein gemischtes Modell gewählt. Die Netzkonfiguration und Art und Genauigkeit der Beobachtungselemente können von Epoche zu Epoche variieren.

In diesem Kapitel wird nach der Modellformulierung zunächst die Gesamtausgleichung aller für die Untersuchung in Frage kommenden Beobachtungsepochen beschrieben. Daran schließt sich die Methode der sequentiellen Parameterschätzung an, bei der in stufenweisen Ausgleichungen durch Hereinnahme neuer Beobachtungsepochen die Parameterschätzung auf der Grundlage der vorliegenden Ergebnisse aktualisiert wird.

4.1 Das gemischte Modell für die Mehrepochenanalyse

4.1.1 Ausgleichungsansatz und Modellvoraussetzungen

Geht man von einem in den Bewegungsparametern linearen Funktionsansatz und von regulären Kofaktorenmatrizen der Koordinatenvektoren aus, so kann das funktionale Modell für eine gemeinsame Auswertung von m Epochen folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
y_1 - e_1 &= \bar{S}_1 \bar{y} + C_1 p + z_1 \\
y_2 - e_2 &= \bar{S}_2 \bar{y} + C_2 p + z_2 \\
&\vdots \\
y_m - e_m &= \bar{S}_m \bar{y} + C_m p + z_m
\end{aligned}
\tag{4.1}$$

Faßt man alle auftretenden Vektoren und Matrizen zusammen, so gilt

$$y - e = \bar{S} \bar{y} + C p + z \tag{4.2}$$

oder mit $i = 1, \dots, m$ in einer auf die i -te Epoche bezogenen Darstellung

$$y_i - e_i = \bar{S}_i \bar{y} + C_i p + z_i \quad . \tag{4.3}$$

Die auftretenden Vektoren und Matrizen haben folgende Bedeutung:

- y_i - bekannter $n_i \times 1$ Vektor der Punktkoordinaten für die i -te Epoche
- e_i - unbekannter $n_i \times 1$ Fehlervektor von y_i
- \bar{y} - unbekannter $u_{\bar{y}} \times 1$ Vektor für die Punktkoordinaten in der Ausgangslage
- \bar{S}_i - bekannte $n_i \times u_{\bar{y}}$ Koeffizientenmatrix ($n_i \leq u_{\bar{y}}$) mit den Elementen Null oder Eins (Die Matrix \bar{S}_i wählt aus dem Vektor \bar{y} die in der i -ten Epoche auftretenden Komponenten aus.)
- p - gesuchter $u_p \times 1$ Vektor der festen, systematisch wirkenden Bewegungsparameter
- C_i - bekannte $n_i \times u_p$ Koeffizientenmatrix, gebildet für die i -te Epoche
- z_i - unbekannter $n_i \times 1$ Zufallsvektor der Modellrestfehler für die i -te Epoche

Die Zahl der Komponenten des Vektors \bar{y} ist gleich der Anzahl aller in den m Epochen auftretenden Punkte multipliziert mit der Dimension der Untersuchung. Die Koeffizientenmatrizen C_i hängen von der Zeit oder zeitlich sich ändernden Einflußgrößen ab. Außerdem können zeitinvariante Koeffizien-

ten, die sich nur auf eine Epoche beziehen, auftreten. Die zu diesen Koeffizienten gehörenden Parameter erfassen die in einzelnen Epochen möglicherweise auftretenden systematischen Abweichungen von dem rein zeitlichen Bewegungsablauf (z.B. reversible Punktlageänderungen aufgrund außergewöhnlicher physikalischer Einflüsse).

Der Argumentation in Kapitel 3.1.1 folgend wird das folgende stochastische Modell zugrundegelegt:

- Der Fehlervektor $\mathbf{e}^T = (e_1^T, \dots, e_m^T)$ sei normalverteilt mit $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ und $\text{Var}(\mathbf{e}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee}$,

$$\mathbf{e} \sim N\{\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee}\} \quad (4.4)$$

\mathbf{Q}_{ee} ist eine Blockmatrix. Sie enthält die Kofaktorenmatrizen $\mathbf{Q}_{e_i e_i}$ der einzelnen Epochen, die aus den Netzausgleichungen bekannt sind. In den abseits der Diagonalblöcke stehenden Submatrizen $\mathbf{Q}_{e_i e_j}$ kommen, wenn sie ungleich Null sind, die Korrelationen zwischen den Epochen zum Ausdruck, die z.B. bei einer gemeinsamen Koordinatenausgleichung aller m Epochen aufgrund algebraischer Verknüpfungen auftreten können.

- Der Vektor $\mathbf{z}^T = (z_1^T, \dots, z_m^T)$ sei normalverteilt mit $E(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ und $\text{Var}(\mathbf{z}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{zz}$,

$$\mathbf{z} \sim N\{\mathbf{0}, \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{zz}\} \quad (4.5)$$

Die zunächst noch unbekannte Blockmatrix \mathbf{Q}_{zz} besteht aus den zu den einzelnen Epochen gehörenden Kofaktorenmatrizen $\mathbf{Q}_{z_i z_i}$ der Zufallsparameter und aus den Submatrizen $\mathbf{Q}_{z_i z_j}$, mit denen eventuell zu berücksichtigende Korrelationen zwischen den Epochen modelliert werden können.

- Die Vektoren \mathbf{e} und \mathbf{z} sind unkorreliert,

$$\text{Kov}(\mathbf{e}, \mathbf{z}) = \text{Kov}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

- Der Term $\bar{\delta}_i \bar{\psi} + c_i p$ ist eine deterministische Größe,

$$E(\bar{\delta}_i \bar{\psi} + c_i p) = \bar{\delta}_i \bar{\psi} + c_i p \quad , \quad \text{Var}(\bar{\delta}_i \bar{\psi} + c_i p) = 0 \quad (4.7)$$

- Für den Koordinatenvektor $\mathbf{y}^T = (\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_m^T)$ ergeben sich aufgrund der bisherigen Annahmen und mit $\mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_m^T)$ die statistischen Aussagen

$$E(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{s}}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{c}\mathbf{p} \quad , \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_0^2(\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz}) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y} \sim N\{\bar{\mathbf{s}}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{c}\mathbf{p} \quad , \quad \sigma_0^2(\mathcal{Q}_{ee} + \mathcal{Q}_{zz})\}$$

und

$$\text{Var}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \sigma_0^2 \mathcal{Q}_{ee} \quad .$$

Eine Schätzung für die Varianz der Gewichtseinheit ist aus der gemeinsamen Koordinatenausgleichung für alle Epochen oder aus den m Einzelausgleichungen gegeben mit

$$s_0^2 = \frac{\Omega_1}{f_1} \quad , \quad (4.9)$$

wobei im Fall von Einzelausgleichungen Ω_1 die Summe der quadratischen Formen der Residuen und f_1 die Summe der Freiheitsgrade der m Einzelausgleichungen bedeuten.

Führt man für die unbekannt Parametervektoren $\bar{\mathbf{y}}$ und \mathbf{p} Näherungswerte, zusammengefaßt in den Vektoren $\bar{\mathbf{y}}_0$ und \mathbf{p}_0 , ein, so läßt sich (4.3) mit $d\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i \bar{\mathbf{s}}_i \bar{\mathbf{y}}_0 - \mathbf{c}_i \mathbf{p}_0$ umschreiben in

$$d\mathbf{y}_i - e_i = \bar{\mathbf{s}}_i d\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{c}_i d\mathbf{p} + \mathbf{z}_i \quad . \quad (4.10)$$

Für den Fall eines in den Parametern nicht linearen Funktionsansatzes

$$E(\mathbf{y}_i) = \bar{\mathbf{s}}_i \bar{\mathbf{y}} + \mathcal{F}_i(\mathbf{p}) \quad (4.11)$$

muß linearisiert werden. $\mathbf{c}_i \mathbf{p}_0$ ist dann durch $\mathcal{F}_i(\mathbf{p})$ und in (4.10) $\mathbf{c}_i d\mathbf{p}$ durch $\left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \mathbf{p}}\right) d\mathbf{p}$ zu ersetzen.

Wird die erste Epoche als Bezugsepoche gewählt, so gilt $\mathbf{c}_1 \mathbf{p} = \mathcal{F}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Mit $\bar{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{y}_1$ enthält der Vektor $d\mathbf{y}_1$ dann die Koordinatenunterschiede der Punkte zwischen der ersten und der i -ten Epoche abzüglich des Näherungswertes des systematischen Bewegungsanteils $\mathbf{c}_i \mathbf{p}_0$. Wird ein Punkt P_i erstmalig in der i -ten Epoche beobachtet, so wird \mathbf{p}_0 dazu benutzt, die Koordi-

naten dieses Punktes auf die Bezugslage $(\bar{y}_{p_i})_0$ zu reduzieren.

Treten Rangdefekte in der Kofaktorenmatrix Q_{ee} auf, so sind die dann bestehenden Restriktionen bezüglich der Punktkoordinaten durch Multiplikation des Zufallsvektors z mit dem im Kapitel 2.3.2 eingeführten Projektionsoperator T_G zu berücksichtigen. Entsprechend den $n = \sum_{i=1}^m n_i$ Komponenten des Koordinatenvektors y haben die Matrizen T_G und Q_{ee} n Zeilen und Spalten. Das funktionale Modell lautet bei einem Rangabfall von Q_{ee} :

$$dy - e = \bar{S} d\bar{y} + C dp + T_G z \quad (4.12)$$

Die für die Konstruktion der Matrix T_G nach (2.93) benötigten Matrizen \mathcal{H} und \mathcal{G} sind dann wie folgt definiert:

Die Spalten von \mathcal{G} spannen das orthogonale Komplement des Spaltenraums von Q_{ee} auf,

$$S(\mathcal{G}) = S(Q_{ee})^\perp, \quad (4.13)$$

und $S(\mathcal{H})$ bildet eine orthogonale Basis des orthogonalen Komplements des Spaltenraums von \mathcal{W}_{yy} . \mathcal{W}_{yy} ist die alle Epochen einschließende Normalgleichungsmatrix des Koordinatenvektors y . Entstammen die Koordinatenvektoren y_i der einzelnen Epochen Einzelausgleichungen, so zerfallen die Kofaktorenmatrix Q_{ee} und die Normalgleichungsmatrix \mathcal{W}_{yy} in die für die einzelnen Epochen geltenden Submatrizen $Q_{e_i e_i}$ und $\mathcal{W}_{y_i y_i}$. Der Projektionsoperator kann dann ebenfalls epochenweise gebildet werden und ist nach (2.93) über die Matrizen \mathcal{G}_i und \mathcal{H}_i zu berechnen. Bei verschwindenden Kovarianzen $Q_{e_i e_j}$ zwischen den Epochen gilt damit die (4.12) vereinfachende Darstellung

$$dy_i - e_i = \bar{S}_i d\bar{y} + C_i dp + T_{G_i} z_i \quad (4.14)$$

für $i = 1, \dots, m$.

Rangdefekte in der Kofaktorenmatrix Q_{ee} treten auf, wenn die Koordinatenvektoren y_i freien Netzausgleichungen ohne feste Referenzpunkte entstammen. Die Restriktionen bezüglich der Punktkoordinaten y_i führen dann zu deterministischen Beziehungen zwischen den gesuchten Komponenten des Parametervektors \bar{y} . Bei Anwendung von Gleichung (2.78) auf das Modell (4.1)

gilt nämlich in diesem Fall $\mathbf{g}_i^T \bar{\mathbf{s}}_i \neq \mathbf{0}$, so daß die mit (2.80) getroffene Voraussetzung wegen

$$S(\bar{\mathbf{s}}) \not\subset S(\mathbf{Q}_{ee}) \quad (4.15)$$

nicht erfüllt ist. Es ist zweckmäßig, für alle Epochen das gleiche Datum festzulegen, also auf allen Epochen gemeinsame Punkte aufzufeldern. Die deterministischen Beziehungen zwischen den Komponenten des Parametervektors $\bar{\mathbf{y}}$ lassen sich dann explizit über die Gleichung

$$\bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

angeben. Die Zahl der Zeilen der Matrix $\bar{\mathbf{H}}^T$ ist gleich dem in jeder Epoche auftretenden Datumsdefekt d . Von den auf die einzelnen Epochen bezogenen Matrizen \mathbf{g}_i^T unterscheidet sich $\bar{\mathbf{H}}^T$ lediglich durch eine größere Anzahl von Nullspalten für die in der einzelnen Epoche nicht vorkommenden Punkte. Eventuell zusätzlich auftretende Konfigurationsdefekte in bestimmten Epochen ändern, wenn die Geometrie des Netzes durch mindestens eine Epoche bestimmt ist, die Struktur der Matrix $\bar{\mathbf{H}}$ nicht.

Um die Parameterschätzung in dem Modell (4.12) unter Beibehaltung der bisherigen Konzeption durchführen zu können, soll die Matrix $\bar{\mathbf{s}}$ nun unter Verwendung von (4.16) so transformiert werden, daß die neu entstehende Matrix die Modellvoraussetzung (2.80) erfüllt, das heißt, daß der Spaltenraum dieser Matrix vollständig in dem Spaltenraum der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{ee} enthalten ist. Die Matrix \mathbf{C} sei so gewählt, daß $S(\mathbf{C}) \subset S(\mathbf{Q}_{ee})$ erfüllt ist.

Die Matrix $\bar{\mathbf{H}}^T$ und der Vektor $\bar{\mathbf{y}}$ können gemäß

$$\bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1^T & \bar{\mathbf{H}}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

partitioniert werden, wobei $\bar{\mathbf{H}}_2^T$ eine reguläre $d \times d$ Matrix darstellt. Unter Berücksichtigung der Näherungswerte läßt sich aus (4.17) die Beziehung

$$\bar{\mathbf{H}}_2^T d\bar{\mathbf{y}}_2 = -\bar{\mathbf{H}}_1^T d\bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{\mathbf{H}}_1^T d\bar{\mathbf{y}}_{01} - \bar{\mathbf{H}}_2^T d\bar{\mathbf{y}}_{02} \quad (4.18)$$

ableiten. Durch Inversion der regulären Matrix $\bar{\mathbf{H}}_2^T$ kann Gleichung (4.18) nach $d\bar{\mathbf{y}}_2$ aufgelöst werden. Da $\bar{\mathbf{H}}_2^T$ eventuell nicht symmetrisch ist, wird zunächst aus rechentechnischen Gründen die Gleichung mit $\bar{\mathbf{H}}_2$ durchmulti-

pliziert und anschließend durch Inversion der dann symmetrischen Koeffizientenmatrix $\overline{\mathcal{H}}_2 \overline{\mathcal{H}}_2^\top$ nach $d\overline{\mathbf{y}}_2$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} d\overline{\mathbf{y}}_2 &= - \left(\overline{\mathcal{H}}_2 \overline{\mathcal{H}}_2^\top \right)^{-1} \overline{\mathcal{H}}_2 \overline{\mathcal{H}}_1^\top d\overline{\mathbf{y}}_1 - \left[\left(\overline{\mathcal{H}}_2 \overline{\mathcal{H}}_2^\top \right)^{-1} \overline{\mathcal{H}}_2 \overline{\mathcal{H}}_1^\top \overline{\mathbf{y}}_{01} + \overline{\mathbf{y}}_{02} \right] \\ &= - \quad \mathcal{L} \quad \cdot \quad d\overline{\mathbf{y}}_1 - \left(\quad \mathcal{L} \quad \cdot \quad \overline{\mathbf{y}}_{01} + \overline{\mathbf{y}}_{02} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die d Parameter, zusammengefaßt im Vektor $\overline{\mathbf{y}}_2$, sind also als eine Linearkombination der $(u_{\overline{\mathbf{y}}} - d)$ Parameter, zusammengefaßt im Vektor $\overline{\mathbf{y}}_1$, darstellbar $[\mathcal{L} = \left(\overline{\mathcal{H}}_2 \overline{\mathcal{H}}_2^\top \right)^{-1} \overline{\mathcal{H}}_2 \overline{\mathcal{H}}_1^\top]$.

Zerlegt man in dem Ausgangsmodell (4.12) den Vektor $\overline{\mathbf{y}}$ in der gleichen Weise in die beiden Subvektoren $\overline{\mathbf{y}}_1$ und $\overline{\mathbf{y}}_2$, so erhält man

$$\mathbf{y} - \left(\overline{\mathcal{S}}_1 \overline{\mathcal{S}}_2 \right) \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{y}}_{01} \\ \overline{\mathbf{y}}_{02} \end{pmatrix} - \mathcal{C} \mathbf{p}_0 - \mathbf{e} = \left(\overline{\mathcal{S}}_1 \overline{\mathcal{S}}_2 \right) \begin{pmatrix} d\overline{\mathbf{y}}_1 \\ d\overline{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} + \mathcal{C} d\mathbf{p} + \mathcal{T}_G \mathbf{z} \quad . \quad (4.20)$$

Der Subvektor $d\overline{\mathbf{y}}_2$ kann nun durch Gleichung (4.19) substituiert werden:

$$\mathbf{y} - \left(\overline{\mathcal{S}}_1 - \overline{\mathcal{S}}_2 \mathcal{L} \right) \overline{\mathbf{y}}_{01} - \mathcal{C} d\mathbf{p}_0 - \mathbf{e} = \left(\overline{\mathcal{S}}_1 - \overline{\mathcal{S}}_2 \mathcal{L} \right) d\overline{\mathbf{y}}_1 + \mathcal{C} d\mathbf{p} + \mathcal{T}_G \mathbf{z} \quad (4.21)$$

Der Freiheitsgrad in dem so transformierten Modell (4.21) beträgt

$$\begin{aligned} f &= \text{rg}(\mathcal{Q}_{ee} : \overline{\mathcal{S}}) - u_{\overline{\mathbf{y}}} - u_p \\ &= \text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) + u_{\overline{\mathbf{y}}_2} - u_{\overline{\mathbf{y}}} - u_p \\ &= \text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) - u_{\overline{\mathbf{y}}_1} - u_p \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit $u_{\overline{\mathbf{y}}_1}$ als Anzahl der Komponenten in dem reduzierten Parametervektor $\overline{\mathbf{y}}_1$ und $u_{\overline{\mathbf{y}}_2}$ als Anzahl der abhängigen Komponenten des Vektors $\overline{\mathbf{y}}_2$. In dem Modell (4.21) gilt nun

$$S(\overline{\mathcal{S}}_1 - \overline{\mathcal{S}}_2 \mathcal{L} : \mathcal{C}) \subset S(\mathcal{Q}_{ee}) \quad , \quad (4.23)$$

so daß die Parameterschätzung gemäß Kapitel 2.3.2 mit beliebigen generalisierten Inversen der rangdefekten Matrix \mathcal{Q}_{ee} erfolgen kann. Mit $\widehat{\overline{\mathbf{y}}}_1$ und $\mathcal{Q}_{\widehat{\overline{\mathbf{y}}}_1 \widehat{\overline{\mathbf{y}}}_1}$ als Ausgleichungsergebnis folgt für den Vektor \mathbf{y}_2 nach (4.19)

$$\widehat{\overline{\mathbf{y}}}_2 = - \mathcal{L} \widehat{\overline{\mathbf{y}}}_1 \quad . \quad (4.24)$$

Die Kofaktorenmatrix des Gesamtvektors $\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{y}}_1^\top \\ \widehat{\boldsymbol{y}}_2^\top \end{pmatrix}$ berechnet sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ausgehend von der Relation

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{y}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{L} \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{y}}_1, \quad \boldsymbol{Q}_{\widehat{\boldsymbol{y}}_1 \widehat{\boldsymbol{y}}_1} \quad . \quad (4.25)$$

Wegen der linearen Abhängigkeiten ergibt sich eine Kofaktorenmatrix mit dem Rangdefekt $d = u_{\overline{\boldsymbol{y}}_2}$.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden für Kapitel 4 die folgenden Vereinbarungen getroffen, die anzuwenden sind, wenn $\text{rg}(\boldsymbol{Q}_{ee}) < n$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{s}} &= \overline{\boldsymbol{s}}_1 - \overline{\boldsymbol{s}}_2 \boldsymbol{L} \\ \overline{\boldsymbol{y}} &= \overline{\boldsymbol{y}}_1 \\ \boldsymbol{d}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y} - (\overline{\boldsymbol{s}}_1 - \overline{\boldsymbol{s}}_2 \boldsymbol{L}) \overline{\boldsymbol{y}}_{01} - \boldsymbol{C} \boldsymbol{p}_0 \\ u_{\overline{\boldsymbol{y}}} &= u_{\overline{\boldsymbol{y}}_1} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Entsprechendes gilt für die mit dem Index i bezeichneten Vektoren und Matrizen in den epochebezogenen Darstellungen.

Nach dem Übergang auf die Schätzgrößen lautet das Modell gemäß (4.12) und (4.14) mit $\boldsymbol{v} = -\hat{\boldsymbol{e}}$

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{d}\widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C} \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{T}_G \hat{\boldsymbol{z}} \quad (4.27)$$

oder, wenn $\boldsymbol{Q}_{e_i e_j}$ gleich Null ist,

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{v}_i = \overline{\boldsymbol{s}}_i \boldsymbol{d}\widehat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{T}_{G_i} \hat{\boldsymbol{z}}_i, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.28)$$

Die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} = (\overline{\boldsymbol{s}} : \boldsymbol{C})$ des festen Parametervektors $\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\top = (\boldsymbol{d}\widehat{\boldsymbol{y}}^\top, \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{p}}^\top)$ sei wieder regulär vorausgesetzt.

Für die Gewichtung der Beobachtungen und der Zufallsparameter wird eine beliebige generalisierte Inverse von \boldsymbol{Q}_{ee} bzw. $\boldsymbol{Q}_{ee} + \boldsymbol{T}_G \boldsymbol{Q}_{zz} \boldsymbol{T}_G^\top$ benötigt. Diese sei analog zu (2.108) festgelegt durch $\boldsymbol{Q}_{ee}^- = (\boldsymbol{Q}_{ee} + \boldsymbol{G} \boldsymbol{G}^\top)^{-1} = \overline{\boldsymbol{Q}}_{ee}^{-1}$ bzw. $(\boldsymbol{Q}_{ee} + \boldsymbol{T}_G \boldsymbol{Q}_{zz} \boldsymbol{T}_G^\top)^- = (\overline{\boldsymbol{Q}}_{ee} + \boldsymbol{T}_G \boldsymbol{Q}_{zz} \boldsymbol{T}_G^\top)^{-1}$. Wenn $\boldsymbol{Q}_{e_i e_j}$ gleich Null ist, kann $\overline{\boldsymbol{Q}}_{ee}$ epochenweise gebildet werden mit $\overline{\boldsymbol{Q}}_{e_i e_j} = \boldsymbol{Q}_{e_i e_i} + \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{G}_i^\top$.

Die Parameterschätzung kann in dem 'Gauß-Markoff-Modell mit erweitertem Beobachtungsvektor' (Kapitel 2.2.2) stattfinden,

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} + \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{s}} d\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{C} d\hat{\mathbf{p}} + \mathcal{T}_G \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{0}_z + \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{Q}}_{ee}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Definiert man $\mathcal{A} = (\bar{\mathbf{s}} : \mathbf{C})$ als Koeffizientenmatrix des Parametervektors $d\hat{\mathbf{x}}^T = (d\hat{\mathbf{y}}^T, d\hat{\mathbf{p}}^T)$, so erhält man die Darstellung (2.105).

Als zweite Möglichkeit kann die Parameterschätzung in dem 'Gauß-Markoff-Modell mit geänderter Gewichtsmatrix' nach Kapitel 2.2.3 durchgeführt werden,

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} + \bar{\mathbf{v}} &= \bar{\mathbf{s}} d\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{C} d\hat{\mathbf{p}}, \quad \mathcal{P}_{yy} = (\bar{\mathcal{Q}}_{ee} + \mathcal{T}_G \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{T}_G^T)^{-1} \\ &= \mathcal{A} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Der Freiheitsgrad in der Ausgleichung beträgt

$$f = \text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) - u_{\bar{\mathbf{y}}} - u_{\mathbf{p}}. \quad (4.31)$$

Im regulären Fall, $\text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) = \sum_{i=1}^m n_i$, ist \mathcal{T}_G durch die Einheitsmatrix und $\bar{\mathcal{Q}}_{ee}$ durch \mathcal{Q}_{ee} zu ersetzen.

Die Schätzfunktion für den festen Parametervektor $d\hat{\mathbf{x}}$, für die Zufallsparameter $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, für die zugehörigen Kofaktorenmatrizen und für die a posteriori Varianz der Gewichtseinheit s_0^2 sind durch die Gleichungen aus Kapitel 2.4 gegeben.

Da bei Mehrepochenanalysen sehr große Matrizen auftreten können und die bei der Ausgleichung anfallenden Rechenoperationen zeit- und speicherplatzintensiv sind, sind Lösungen anzustreben, die eine schrittweise oder sequentielle Bearbeitung des Problems gestatten, wie sie z.B. bei MORITZ (1973a) beschrieben sind. Den Vorteilen, die sich dadurch für die Matrizeninversionen ergeben, steht jedoch ein erhebliches Anwachsen der durchzuführenden Matrizenmultiplikationen gegenüber. Nur wenn zwischen den einzelnen Epochen weder bei den Fehlervektoren \mathbf{e}_i noch bei den Vektoren \mathbf{z}_i Korrelationen bestehen, bringt die sequentielle Bearbeitung nennenswerte Vorteile. Auf dieses Verfahren wird im Kapitel 4.3 eingegangen.

4.1.2 Gewichtung der Zufallsparameter

Die für die Gewichtsbestimmung erforderliche Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{zz} der Zufallsparameter ist unter ähnlichen Vorgaben, wie sie im Kapitel 3.1.2.1 beschrieben worden sind, vor der Ausgleichung aufzustellen.

Jeder Epoche i wird ein durch (3.19) und (3.20) definiertes ortsabhängiges Zufallsvektorfeld $\{\mathbf{z}_i(\mathbf{r})\}$ zugeordnet. Faßt man alle Epochen zusammen, so entsteht ein orts- und zeitabhängiges Vektorfeld

$$\{\mathbf{z}(\mathbf{r}, t)\} \quad . \quad (4.32)$$

Der Vektor $\mathbf{z}^T = (\mathbf{z}_1^T, \dots, \mathbf{z}_m^T)$ in (4.2) repräsentiert eine Stichprobe des Zufallsprozesses, die durch $\hat{\mathbf{z}}$ geschätzt wird.

Ergänzend zu den im Kapitel 3.1.2.1 getroffenen Voraussetzungen und Annahmen zur Beschreibung des Zufallsfeldes werden für das Mehrepochenmodell die folgenden Erweiterungen vereinbart:

- Der Erwartungswert $E[\mathbf{z}(\mathbf{r}, t)]$ ist orts- und zeitunabhängig. Nach der Trendabspaltung kann $E(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ vorausgesetzt werden.
- Die Kovarianzen innerhalb der Epochen sind eine für alle Epochen gleichermaßen geltende Funktion des Punktabstandes d und zwischen den Epochen zusätzlich eine Funktion des zwischen den Beobachtungen liegenden Zeitintervalls Δt . Die Varianzen ($d = 0$, $\Delta t = 0$) sind für alle Punkte in allen Epochen gleich.
- Die Kovarianzen zwischen den Epochen streben mit wachsendem zeitlichem Abstand gegen Null.

Es wird zunächst nur die Korrelationsmatrix \mathcal{K}_{zz} der regulär vorausgesetzten Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{zz} benötigt. Die endgültige Umrechnung in die Kofaktoren- bzw. Varianz-Kovarianz-Matrix durch Multiplikation mit den noch unbekanntem Varianzfaktoren (3.36) geschieht in einer späteren Bearbeitungsphase (Kapitel 4.2). Die Submatrizen $\mathcal{K}_{z_1 z_1}$ der einzelnen Epochen werden wie in der Zweiepochenanalyse nach den im Kapitel 3.1.2.1 genannten Grundsätzen anhand vorzugebender Korrelationsfunktionen gebildet.

Die den Epochen zugeordneten Subvektoren \mathbf{z}_i aus \mathbf{z} können als eine Realisation eines zeitabhängigen Zufallsvektorfeldes angesehen werden. Setzt man aus praktischen Gründen ein reines Autokorrelationsfeld voraus, so tre-

ten in den Korrelationsmatrizen $\mathcal{K}_{z_1 z_j}$, die die Epochen untereinander verbinden, nur Korrelationen zwischen gleichen, aber zu verschiedenen Epochen bestimmten Koordinaten auf. Alle anderen Korrelationskoeffizienten sind gleich Null. Die Punktkorrelationen werden ebenfalls mit Korrelationsfunktionen konstruiert, wobei zwischen den Koordinatenachsen differenziert werden kann. Es sind also maximal im dreidimensionalen Fall drei Korrelationsfunktionen aufzustellen. Hinweise für mögliche Funktionstypen sind mit (3.30) bis (3.33) gegeben. Es ist dort lediglich die unabhängige Variable d durch die Zeitdifferenz $|\Delta t|$ zu ersetzen. Hinsichtlich der Größe der Korrelationen zwischen den Epochen gelten die im Kapitel 3.1.2.1 angestellten Überlegungen, die in analoger Weise auf den Zeitbereich übertragen werden können. Ebenso behalten die Untersuchungen des Kapitels 3.1.2.2 über den Einfluß von fehlerhaften Gewichtsannahmen der Zufallsparameter im Mehrepochenmodell ihre Gültigkeit.

4.2 Modellüberprüfung und Modellanpassung bei einer gleichzeitigen Auswertung aller Beobachtungsepochen

Die Bearbeitungsphasen, in denen das Ausgangsmodell schrittweise an die aktuellen Gegebenheiten angepaßt wird, entsprechen bei einer Ausgleichung aller Epochen in einem Guß der Vorgehensweise, die für das Zweiepochenmodell bereits beschrieben wurde. Allerdings ist es jetzt sinnvoll, um Überlagerungen verschiedener Modellfehler zu vermeiden, Einzelpunktbewegungen in Vorausgleichungen, z.B. durch eine Analyse im Zweiepochenmodell, zu lokalisieren. Diese Punkte werden für die Folgeepochen umbenannt und wie neu auftretende Punkte behandelt. An die Stelle der Einzelpunktlokalisierung tritt im Mehrepochenmodell die Untersuchung einzelner Epochen auf signifikante Abweichungen vom Bewegungsmodell.

In dem Ablaufdiagramm (Abb. 5) sind die bei der Modellanalyse zu durchlaufenden Schritte im Zusammenhang dargestellt.

4.2.1 Globaltest der Punktbewegungen und der Verbesserungen im festen Gauß-Markoff-Modell

Ausgehend von einer Ausgleichung in dem Modell

$$d\mathbf{y} + \mathbf{v} = \bar{\mathbf{s}} d\hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee} \quad (4.33)$$

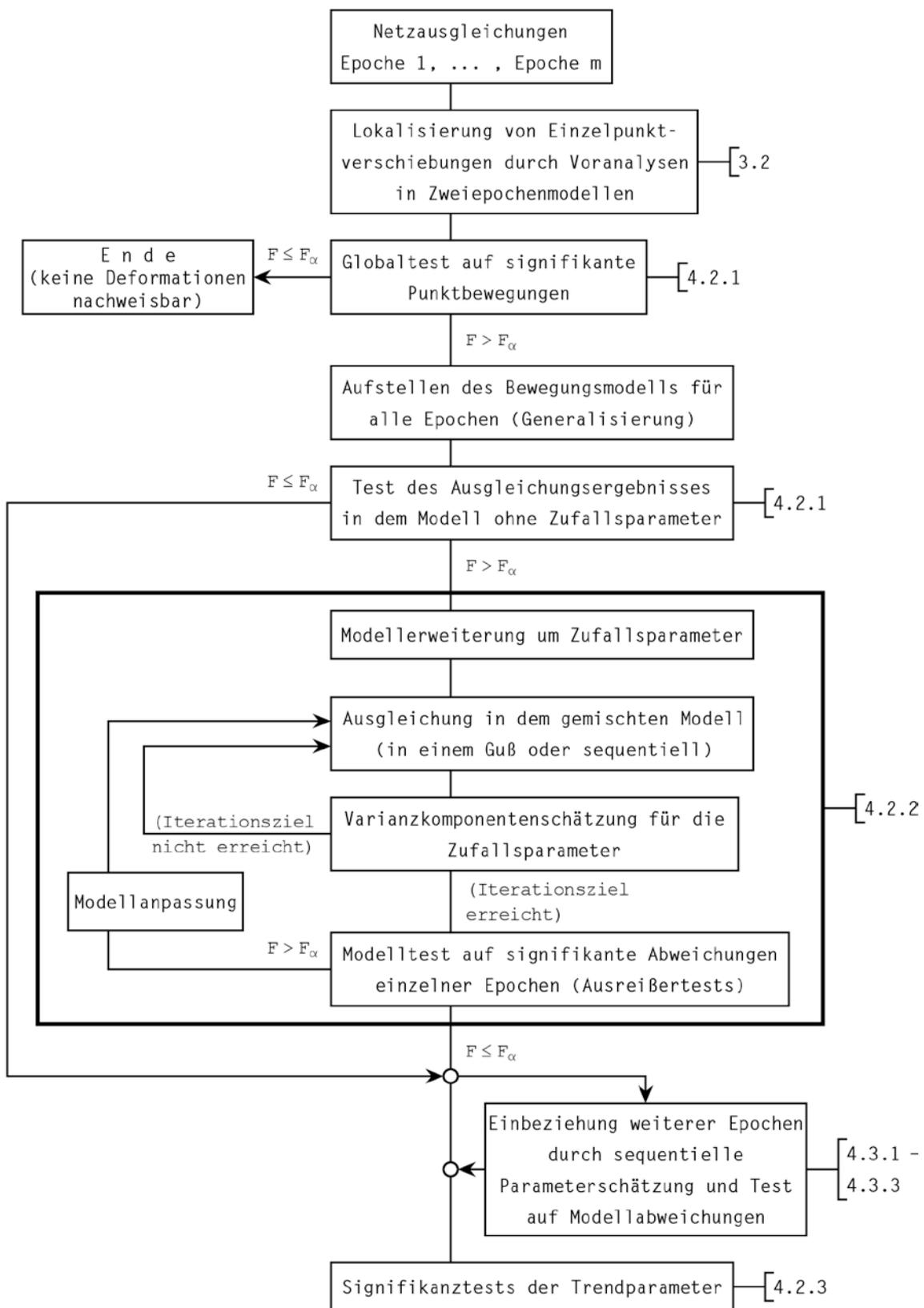


Abbildung 5 Ablaufdiagramm zur Modellanalyse im Mehrepechenmodell (die rechts stehenden Ziffern verweisen auf die Textkapitel)

mit dem Freiheitsgrad $f_2 = \text{rg}(\mathbf{Q}_{ee}) - u_{\bar{y}}$ läßt sich die Nullhypothese, alle Punkte sind stabil geblieben, untersuchen. Der Test wird mit der nach (3.60) bis (3.63) abzuleitenden, F-verteilter Testgröße (3.64) durchgeführt, wobei jetzt ${}_1s_0^2$ und f_1 wie in (4.9) definiert sind.

Muß die Nullhypothese verworfen werden, wird auf das Generalisierungsmodell ohne Zufallsparameter

$$d\mathbf{y} + \mathbf{v} = \bar{S}d\hat{\mathbf{y}} + C d\hat{\mathbf{p}} \quad , \quad \text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{yy} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ee} \quad (4.34)$$

mit dem Freiheitsgrad $f_3 = \text{rg}(\mathbf{Q}_{ee}) - u_{\bar{y}} - u_p$ übergegangen. Mit der aus diesem Modell resultierenden quadratischen Form der Residuen q_3 wird die Nullhypothese, die Objektbewegungen werden durch (4,34) hinreichend genau erfaßt, auf ihre Gültigkeit untersucht.

Muß auch diese Nullhypothese verworfen werden, so kann das eine Folge von systematischen Modellabweichungen einzelner Beobachtungsepochen oder von zufällig wirkenden unregelmäßigen Punktbewegungen (Modellrestfehler) sein.

4.2.2 Schätzung der Varianz der Gewichtseinheit für die Zufallsparameter und Lokalisierung von abweichenden Beobachtungsepochen

Zur Modellierung der vorhandenen Modellrestfehler wird auf das gemischte Modell in der Darstellung (4.29) übergegangen, mit den entsprechenden Vereinfachungen im regulären Fall. Für den Vektor \mathbf{O}_z der Pseudobeobachtungen ist eine Varianzkomponentenschätzung durchzuführen, um die Korrelationsmatrix \mathbf{K}_{zz} in die Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{zz} gemäß (3.70) transformieren zu können. Diese Varianzkomponentenschätzung kann nach den im Kapitel 3.2.2 genannten Grundsätzen mit den Formeln (3.70) bis (3.78) oder, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, vereinfacht nach den Formeln (3.79) bis (3.83) stattfinden. Die Schätzung für die Varianz der Gewichtseinheit ${}_1s_0^2$ ist durch (4.9) gegeben.

Bei einem passenden Modell dürfen keine systematischen Modellabweichungen auftreten. Deshalb wird im Anschluß an die Varianzkomponentenschätzung durch einen Modelltest geprüft, ob für alle Epochen die Modellvoraussetzung $E(\hat{\mathbf{z}}) = \mathbf{O}$ erfüllt ist. Die Testgröße wird abgeleitet aus der Abnahme der quadratischen Form der Residuen, die sich ergibt, wenn die zu der i-ten Epoche gehörenden n_i Pseudobeobachtungen aus der Ausgleichung gestrichen wer-

den. Die dieser Epoche zugeordneten Komponenten des Vektors \mathbf{s} werden dann Teil des deterministischen Trendmodells (vgl. 3.95). Dabei müssen zwei Fälle unterschieden werden.

Im ersten Fall gilt $\text{rg}(\mathbf{Q}_{e_i e_i}) = n_i$ und es bleiben alle unbekannt Parameter der Vektoren $\bar{\mathbf{y}}$ und \mathbf{p} auch nach der Verkürzung des Beobachtungsvektors schätzbar. Der Zusammenhang zwischen den quadratischen Formen der Residuen $\Omega_{f-\Delta f_i}$ aus der Ausgleichung mit einem durch die Streichung um $\Delta f_i = \text{rg}(\mathbf{Q}_{e_i e_i}) = n_i$ kleineren Freiheitsgrad und Ω_f aus der Ausgleichung im Ausgangsmodell ist in Analogie zu (3.90) gegeben durch

$$\begin{aligned}\Omega_{f-\Delta f_i} &= \Omega_f - \hat{\mathbf{z}}^T \mathbf{Q}_{ZZ}^{-1} \mathbf{S}_i (\mathbf{S}_i^T \mathbf{Q}_{ZZ}^{-1} \mathbf{Q}_{ZZ} \mathbf{Q}_{ZZ}^{-1} \mathbf{S}_i)^{-1} \mathbf{S}_i^T \mathbf{Q}_{ZZ}^{-1} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \Omega_f - u_i^2 \quad .\end{aligned}\tag{4.35}$$

Die Matrix \mathbf{S}_i bezeichnet die Auswahlmatrix (3.89), in der für die i -te Epoche die $n_i \times n_i$ Einheitsmatrix einzutragen ist. Sind die Epochen untereinander nicht korreliert, so gilt die vereinfachte Beziehung

$$u_i^2 = \hat{\mathbf{z}}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_i \hat{\mathbf{z}}_i}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_i \tag{4.36}$$

mit dem auf die i -te Epoche bezogenen Subvektor $\hat{\mathbf{z}}_i$ aus $\hat{\mathbf{z}}$ und der entsprechenden Submatrix $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_i \hat{\mathbf{z}}_i}$ aus $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}}}$. Wird die Parameterschätzung in dem Modell (4.30) durchgeführt, so kann, wie in Kapitel 3.2 gezeigt wurde, der Anteil u_i^2 nach (3.98) auch aus

$$u_i^2 = \bar{\mathbf{v}}^T \mathcal{P}_{yy} \mathbf{S}_i (\mathbf{S}_i^T \mathcal{P}_{yy} \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}} \mathcal{P}_{yy} \mathbf{S}_i)^{-1} \mathbf{S}_i^T \mathcal{P}_{yy} \bar{\mathbf{v}} \tag{4.37}$$

bzw. bei verschwindenden Korrelationen zwischen den Epochen aus

$$u_i^2 = \bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{v}}_i \bar{\mathbf{v}}_i}^{-1} \bar{\mathbf{v}}_i \tag{4.38}$$

berechnet werden.

Im zweiten Fall wird bei Streichung der n_i Pseudobeobachtungen aus der i -ten Epoche die Koeffizientenmatrix, gebildet aus den in (4.29) auftretenden Submatrizen vor den Vektoren $d\hat{\mathbf{y}}$, $d\hat{\mathbf{p}}$ und $\hat{\mathbf{s}}$, singular. Dieser Fall tritt ein, wenn einzelne Parameter aus dem Vektor $d\hat{\mathbf{x}}^T = (d\hat{\mathbf{y}}^T d\hat{\mathbf{p}}^T)$ nur in der i -ten Epoche auftreten und infolgedessen nach der Streichung nicht mehr schätzbar sind. Der Klammerausdruck in (4.35) bzw. die Matrix $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}_i \hat{\mathbf{z}}_i}$ in

(4.36) werden ebenfalls singular, so daß keine eindeutigen Inversen existieren. Der Rangabfall ist gleich der Anzahl d_i der in dem reduzierten Modell nicht mehr schätzbaren Parameter. Ein weiterer Rangabfall von $n_i - r_i$ tritt auf, wenn $\text{rg}(\mathcal{Q}_{e_i e_i}) = r_i < n_i$. Gegebenenfalls addieren sich beide Defekte. Der Anteil u_i^2 läßt sich jedoch mit jeder beliebigen generalisierten Inverse eindeutig berechnen:

$$u_i^2 = \hat{z}^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \mathcal{S}_i \left(\mathcal{S}_i^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \mathcal{Q}_{zz} \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \mathcal{S}_i \right)^- \mathcal{S}_i^T \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \hat{z} \quad (4.39)$$

Die Gleichung (4.37) kann nämlich auf die Form

$$u_i^2 = \bar{v}^T \mathcal{P}_{yy} \left[\mathcal{Q}_{vv} \mathcal{P}_{yy} \mathcal{S}_i \left(\mathcal{S}_i^T \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} \mathcal{P}_{yy} \mathcal{S}_i \right)^- \mathcal{S}_i^T \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} \right] \mathcal{P}_{yy} \bar{v} \quad (4.40)$$

gebracht werden, was wegen $\bar{v}^T \mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv} = \bar{v}^T$ und der Idempotenz des Produkts $\mathcal{P}_{yy} \mathcal{Q}_{vv}$ zulässig ist. Es gilt allgemein der Satz, daß, wenn \mathcal{V} eine positiv definite Matrix ist, ein Ausdruck der Form $\mathcal{X}(\mathcal{X}^T \mathcal{V} \mathcal{X})^- \mathcal{X}^T$ invariant gegenüber der Wahl von $(\mathcal{X}^T \mathcal{V} \mathcal{X})^-$ und symmetrisch ist [KOCH 1980, S. 50]. Wendet man diesen Satz auf den in der eckigen Klammer stehenden Teil von Gleichung (4.40) an, so folgt, da \mathcal{P}_{yy} immer positiv definit gewählt werden kann, daß in (4.40) und damit auch in (4.37) die reguläre Inverse bei einem Rangdefekt durch eine beliebige generalisierte Inverse ersetzt werden kann. Wegen (3.101) und (3.102) gilt auch Gleichung (4.39). Durch Ausmultiplizieren läßt sich zeigen, daß, wenn keine Korrelationen zwischen den Epochen bestehen, die vereinfachten Berechnungsformeln (4.36) und (4.38) mit beliebigen generalisierten Inversen an Stelle der regulären Inversen angewendet werden können. Bei Streichung der n_i Pseudobeobachtungen können die nicht mehr schätzbaren d_i Unbekannten gleich Null gesetzt werden, so daß die Koeffizientenmatrix wieder regulär wird. Der Freiheitsgrad in der Ausgleichung mit dem verkürzten Beobachtungsvektor beträgt somit $f - \text{rg}(\mathcal{Q}_{e_i e_i}) + d_i$, und es gilt mit $\Delta f_i = \text{rg}(\mathcal{Q}_{e_i e_i}) - d_i$

$$\Omega_{f - \Delta f_i} = \Omega_f - u_i^2 \quad . \quad (4.41)$$

Die Anteile u_i werden für alle m Epochen berechnet, und für die Epoche mit dem größten Anteil wird analog zu (3.92) die Testgröße

$$F = \frac{(u_i^2)_{\max}}{\Delta f_i} / \frac{\Omega_{f - \Delta f_i}}{f - \Delta f_i}$$

mit $\Delta f_i = \text{rg}(\mathcal{Q}_{e_i e_i})$ bzw. $\Delta f_i = \text{rg}(\mathcal{Q}_{e_i e_i}) - d_i$ gebildet. Diese wird mit dem bei einer vorzugebenden Sicherheitswahrscheinlichkeit $S = 1 - \alpha$ zu bildenden Fraktilwert der F-Verteilung mit Δf_i Freiheitsgraden im Zähler und f_1 Freiheitsgraden im Nenner verglichen. Hinsichtlich der Festlegung der Sicherheitswahrscheinlichkeit für die Einzeltests und der Strategie bei der Suche nach signifikant abweichenden Epochen gelten die im Kapitel 3.2 für die Lokalisierung von Einzelpunktbewegungen genannten Prinzipien und Ableitungen. Erweisen sich eine oder einzelne Epochen als nicht modellkonform, so ist zu entscheiden, ob das funktionale Modell geändert werden soll oder ob die lokalisierten Epochen als 'Ausreißer' behandelt werden sollen. In diesem Fall können die betreffenden Epochen, wenn die \mathcal{Q}_{ee} -Matrix regulär ist oder keine Korrelationen zwischen den Epochen bestehen, aus der Ausgleichung vollständig gestrichen werden. Ist die \mathcal{Q}_{ee} -Matrix singulär und vollbesetzt, so ist entsprechend (3.103) bis (3.106) vorzugehen.

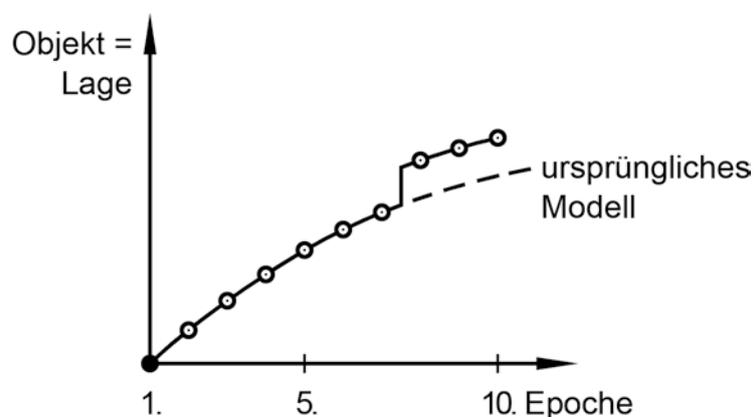


Abbildung 6 Irreversibler Sprung

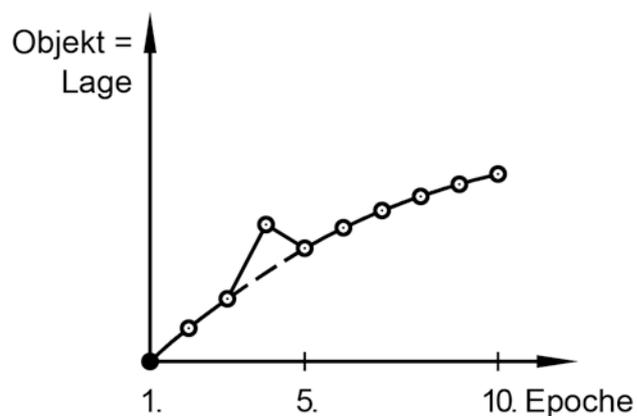


Abbildung 7 Reversible Lageabweichung

Anlaß zu einer Modelländerung kann z.B. ein zwischen zwei Epochen aufgetretener irreversibler Sprung in der Objektlage sein (s. Abb. 6), während eine reversible Abweichung der Objektlage über ein oder zwei Epochen als Ausreißer behandelt werden kann (s. Abb. 7).

4.2.3 Signifikanztest der Trendparameter

Den Abschluß der Modellüberprüfung bilden die Signifikanzuntersuchungen der Parameter des Generalisierungsmodells, zusammengefaßt im Vektor \hat{p} .

Mit (2.169) existiert in dem Modell (4.29) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \bar{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{v} + \hat{\mathbf{z}}^T Q_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} &= d\mathbf{y}^T \bar{Q}_{ee}^{-1} d\mathbf{y} - \hat{\mathbf{z}}^T N_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}} \hat{\mathbf{z}} - \left(d\hat{\mathbf{y}}^T, d\hat{\mathbf{p}}^T \right) \begin{pmatrix} Q_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}} & Q_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{p}}} \\ Q_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{p}}}^T & Q_{\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d\hat{\mathbf{y}} \\ d\hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \\ \Omega &= q_{dy} - q_{\hat{\mathbf{z}}} - q_{d\hat{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die quadratische Form $q_{d\hat{\mathbf{x}}}$ läßt sich auf der in (2.161) bis (2.164) gezeigten Weise in zwei unkorrelierte Anteile zerlegen.

$$q_{d\hat{\mathbf{x}}} = d\hat{\mathbf{y}}^T N_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}} d\hat{\mathbf{y}} + d\hat{\mathbf{p}}^T Q_{\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}}^{-1} d\hat{\mathbf{p}} \quad (4.44)$$

Wenn die Nullhypothese $H_0: E(\hat{p}) = \mathbf{0}$ lautet, kann die Ausgleichung mit den Näherungswerten $p_0 = \mathbf{0}$ durchgeführt und $d\hat{p} = \hat{p}$ gesetzt werden. Die Signifikanztests werden nach dem im Kapitel 3.2.4 beschriebenen Verfahren der Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche, ausgehend von der quadratischen Form $\hat{p}^T Q_{\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}}^{-1} \hat{p}$ und der Varianzschätzung ${}_1s_0^2$ nach (4.9), durchgeführt.

4.3 Anwendung der sequentiellen Parameterschätzung auf die Mehr-epochenanalyse

4.3.1 Vorgehensweise

Unter den Voraussetzungen, daß keine Korrelationen zwischen den Epochen existieren ($Q_{e_i e_j} = Q_{z_i z_j} = \mathbf{0}$) und daß keine einen Rangabfall von Q_{ee} begründenden Bedingungen zwischen Koordinaten unterschiedlicher Epochen zu berücksichtigen sind, kann mit Erfolg die Methode der sequentiellen Parame-

terschätzung angewandt werden. Die kleineren Matrizendimensionen gestatten eine bessere Speicherplatzorganisation und führen zu günstigeren Bearbeitungszeiten. Die sequentielle Parameterschätzung entspricht unter den genannten Voraussetzungen streng einer gemeinsamen Ausgleichung aller vorliegenden Epochen. Das Verfahren bietet sich außerdem an, wenn nach einer gewissen Anzahl von Beobachtungsepochen eine erste Parameterschätzung durchgeführt wird und dieses Ergebnis mit jeder neu hinzukommenden Folgepoche in stufenweisen Ausgleichungen aktualisiert werden soll. Es ist dann nicht notwendig, auf zurückliegendes Beobachtungsmaterial zuzugreifen. In diesem Fall muß das Generalisierungsmodell, da man die Resultate der Folgepoche noch nicht kennt, hypothetisch aus außergeodätischen Informationen oder auf der Grundlage einer genügend großen Zahl von Anfangsepochen aufgestellt werden. Die Ausgleichung der Anfangsepochen erfolgt nach den in den Kapiteln 4.1 und 4.2 genannten Prinzipien einschließlich Varianzkomponentenschätzung und Ausreißertests in einer gemeinsamen Ausgleichung oder sequentiell. Die sich bei der sequentiellen Berechnungsmethode ergebenden rechen-technischen Besonderheiten werden im Kapitel 4.3.2 behandelt. Ein Ergebnis dieser Ausgleichung sind die Faktoren (s. Kapitel 3.2), mit denen die Korrelationsmatrix \mathcal{K}_{zz} in die Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{zz} transformiert wird. Diese Faktoren werden für die Folgeepochen beibehalten, eine weitere Varianzkomponentenschätzung entfällt.

Wird nun die Parameterschätzung unter Einbeziehung einer Folgepoche aktualisiert, so kann über einen Modelltest (Kapitel 4.3.3) untersucht werden, ob die Folgepoche den bisherigen stochastischen und funktionalen Modellannahmen genügt. Wird die Nullhypothese nicht bestätigt, so ist zu entscheiden, ob die neue Epoche als Ausreißer behandelt oder ob für diese und alle weiteren Epochen ein neues Modell formuliert wird. Modellabweichungen können auch Anlaß sein, das bisher verwendete Modell um Zusatzparameter zu erweitern und alle beobachteten Epochen neu auszugleichen.

Einzelpunktverschiebungen werden zweckmäßigerweise wieder durch Vorweganalysen im Zweiepochenmodell lokalisiert.

Die Signifikanz der Bewegungsparameter kann anhand der quadratischen Form der Parameter in gewohnter Weise nach jeder Folgeausgleichung untersucht werden. Dabei ist es zuweilen sinnvoll, trotz der Nichtsignifikanz einzelner Parameter das Modell beizubehalten, da diese sich zu einem späteren Zeitpunkt als relevant erweisen könnten.

4.3.2 Berechnungsformeln für die Parameter- und Genauigkeitsschätzung

Die Berechnungsformeln werden der Übersichtlichkeit wegen in dem Modell (4.30) abgeleitet. Die Matrix \mathcal{J}_{G_i} ist im folgenden durch die Einheitsmatrix zu ersetzen, wenn die Matrix $\mathcal{Q}_{e_i e_i}$ regulär ist.

In der r-ten Stufe soll die Parameterschätzung durch Einbeziehung des Koordinatenvektors \mathbf{y}_k der k-ten Epoche verbessert werden. Bekannt sind in dieser Stufe die Parameterschätzung $\hat{\mathbf{x}}_{r-1}$ auf der Grundlage der ersten k-1 Beobachtungsepochen und die zugehörige Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{r-1} . Die gesuchte neue Parameterschätzung ist das Ergebnis einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate in dem System (\mathbf{E} - Einheitsmatrix passender Ordnung)

$$\begin{aligned} d\mathbf{y}_k + (\bar{\mathbf{v}}_k)_r &= \mathcal{A}_k d\hat{\mathbf{x}}_r \\ d\hat{\mathbf{x}}_{r-1} + (\mathbf{v}_x)_r &= \mathbf{E} d\hat{\mathbf{x}}_r \end{aligned} \quad , \quad \mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{y_k y_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}_{r-1} \end{pmatrix} . \quad (4.45)$$

Hierin bedeuten:

- $d\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k - \mathcal{A}_k \mathbf{x}_r^0$ bzw. $d\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k - \mathcal{F}_k(\mathbf{x}_r^0)$; \mathbf{x}_r^0 ist der in der r-ten Stufe gültige Vektor der Näherungswerte für den Parametervektor $\mathbf{x}^T = (\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{p}^T)$.
- $(\bar{\mathbf{v}}_k)_r = (\mathbf{v}_k)_r - (\hat{\mathbf{z}}_k)_r$ ist der sich in der r-ten Stufe ergebende Vektor der Gesamtverbesserungen zu dem Vektor \mathbf{y}_k .
- $\mathcal{A}_k = \left(\begin{array}{c} \bar{\mathbf{s}}_k \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k \end{array} \right)$
- $d\hat{\mathbf{x}}_{r-1} = \hat{\mathbf{x}}_{r-1} - \mathbf{x}_r^0$
- $(\mathbf{v}_x)_r$ ist der Vektor der durch die k-te Epoche verursachten Änderungen in der Parameterschätzung.
- $\mathcal{P}_{y_k y_k} = \left(\bar{\mathcal{Q}}_{e_k e_k} + \mathcal{J}_{G_k} \mathcal{Q}_{z_k z_k} \mathcal{J}_{G_k}^T \right)^{-1}$
- $\mathcal{N}_{r-1} = \mathcal{Q}_{r-1}^{-1}$

Die aktuelle Parameterschätzung ist zu berechnen aus

$$d\hat{\mathbf{x}}_r = \mathcal{N}_r^{-1} \left(\mathcal{A}_k^T \mathcal{P}_{y_k y_k} d\mathbf{y}_k + \mathcal{N}_{r-1} d\hat{\mathbf{x}}_{r-1} \right) \quad (4.46)$$

mit der Normalgleichungsmatrix

$$\mathcal{N}_r = \mathcal{A}_k^\top \mathcal{P}_{y_k y_k} \mathcal{A}_k + \mathcal{N}_{r-1} = \mathcal{Q}_r^{-1} \quad . \quad (4.47)$$

Falls durch die Einbeziehung der k-ten Epoche neue Parameter auftauchen (z.B. erstmalig beobachtete Punkte oder nur auf die k-te Epoche bezogene, vom übergeordneten Trend abweichende Parameter), so ist die Matrix \mathcal{N}_{r-1} mit der entsprechenden Anzahl Nullzeilen und -spalten zu rändern und für diese Parameter $\hat{x}_{r-1} = x_r^0$ zu setzen.

Die Schätzfunktion für den Vektor der Zufallsparameter der k-ten Epoche lautet nach (2.128)

$$(\hat{z}_k)_r = \mathcal{Q}_{z_k z_k} \mathcal{T}_{G_k}^\top \mathcal{P}_{y_k y_k} (y_k - \mathcal{A}_k \hat{x}_r) \quad . \quad (4.48)$$

Für die vorherigen Epochen ergibt sich aufgrund der veränderten Parameterschätzung gegenüber der bisherigen Schätzung $(\hat{z}_i)_{r-1}$ eine Änderung um $(\Delta \hat{z}_i)_r$:

$$\begin{aligned} (\hat{z}_i)_r &= (\hat{z}_i)_{r-1} + (\Delta \hat{z}_i)_r \\ &= (z_i)_{r-1} + \mathcal{Q}_{z_i z_i} \mathcal{T}_{G_i}^\top \mathcal{P}_{y_i y_i} [-(v_x)_r] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ebenso ändern sich mit jeder Folgeausgleichung die Elemente der Kofaktorenmatrix $\mathcal{Q}_{z\hat{z}}$ des Vektors \hat{z} . Die Gleichung für die auf der Hauptdiagonalen stehenden Submatrizen $\mathcal{Q}_{\hat{z}_i \hat{z}_i}$ der einzelnen Epochen lautet nach (2.125) und (2.137)

$$(\mathcal{Q}_{\hat{z}_i \hat{z}_i})_r = \mathcal{Q}_{z_i z_i} \mathcal{T}_{G_i}^\top (\mathcal{P}_{y_i y_i} - \mathcal{P}_{y_i y_i} \mathcal{A}_i \mathcal{Q}_r \mathcal{A}_i^\top \mathcal{P}_{y_i y_i}) \mathcal{T}_{G_i} \mathcal{Q}_{z_i z_i} \quad . \quad (4.50)$$

Zur Berechnung von (4.49) und (4.50) muß also auf die mit dem Index i versehenen Vektoren und Matrizen aller k Epochen zurückgegriffen werden. Diese Berechnungen sind jedoch nur während der Ausgleichung und Analyse der Anfangsepochen erforderlich, nämlich bei der Schätzung der Varianzkomponenten für die Zufallsparameter und bei der Lokalisierung eventuell als 'Ausreißer' anzusehender Beobachtungsepochen. Da keine Korrelationen zwischen den Epochen existieren, werden aus der Gesamtmatrix $\mathcal{Q}_{z\hat{z}}$ lediglich die Submatrizen $\mathcal{Q}_{\hat{z}_i \hat{z}_i}$ benötigt. Die Varianzkomponentenschätzung und die Ausreißertests

werden in dieser Bearbeitungsphase wie im Kapitel 4.2 beschreiben durchgeführt.

Die quadratische Form der Residuen aller k Epochen beträgt in der r -ten Stufe nach (2.160)

$$\Omega_r = \sum_{i=1}^k d\mathbf{y}_i^T \mathcal{P}_{y_i y_i} d\mathbf{y}_i - d\hat{\mathbf{x}}_r^T \mathcal{N}_r d\hat{\mathbf{x}}_r . \quad (4.51)$$

Für das Modell (4.45) kann nach dem gleichen Prinzip die Relation

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_r &= (\bar{\mathbf{v}}_k)_r^T \mathcal{P}_{y_k y_k} (\bar{\mathbf{v}}_k)_r + (\mathbf{v}_x)_r^T \mathcal{N}_{r-1} (\mathbf{v}_x)_r \\ &= d\mathbf{y}_k^T \mathcal{P}_{y_k y_k} d\mathbf{y}_k + d\hat{\mathbf{x}}_{r-1}^T \mathcal{N}_{r-1} d\hat{\mathbf{x}}_{r-1} - d\hat{\mathbf{x}}_r^T \mathcal{N}_r d\hat{\mathbf{x}}_r \end{aligned} \quad (4.52)$$

aufgestellt werden. Löst man diese Gleichung nach $d\hat{\mathbf{x}}_r^T \mathcal{N}_r d\hat{\mathbf{x}}_r$ auf und substituiert in (4.51), so folgt

$$\Omega_r = \left(\sum_{i=1}^{k-1} d\mathbf{y}_i^T \mathcal{P}_{y_i y_i} d\mathbf{y}_i - d\hat{\mathbf{x}}_{r-1}^T \mathcal{N}_{r-1} d\hat{\mathbf{x}}_{r-1} \right) + \Delta\Omega_r . \quad (4.53)$$

Der in Klammern stehende Ausdruck ist gleich Ω_{r-1} , so daß Ω_r in jeder Stufe einfach zu berechnen ist aus

$$\Omega_r = \Omega_{r-1} + \Delta\Omega_r . \quad (4.54)$$

$\Delta\Omega_r$ ist der durch die k -te Epoche hervorgerufene Anstieg der quadratischen Form der Residuen. Eine aktuelle Schätzung für die Varianz der Gewichtseinheit ist durch

$$(s_0^2)_r = \frac{\Omega_r}{f_r} \quad (4.55)$$

gegeben mit $f_r = \sum_{i=1}^k \text{rg}(\mathcal{Q}_{e_i e_i}) - u_{\bar{y}} - u_p$ Freiheitsgraden.

4.3.3 Ermittlung von Modellabweichungen bei Hinzunahme einer neuen Beobachtungsepoche

Im Anschluß an eine Folgeausgleichung gemäß (4.45) wird die Nullhypothese, die zusätzliche Epoche ist modellkonform,

$$H_0 : E(\Delta\Omega_r) = \sigma_0^2 \cdot \Delta f_r \quad (4.56)$$

aufgestellt. $\Delta\Omega_r$ ist durch (4.52) definiert und bezeichnet die quadratische Form der Residuen und Δf_r den Freiheitsgrad der Folgeausgleichung. Wenn die Nullhypothese zutrifft, gilt nach (2.183)

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \Delta\Omega_r \sim \chi^2 [\Delta f_r, 0] \quad (4.57)$$

Eine zweite unabhängig χ^2 -verteilte Größe läßt sich nach (4.9) aus den in der r-ten Stufe vorliegenden k Netzausgleichungen bilden

$$\frac{{}_1s_0^2 \cdot f_1}{\sigma_0^2} \sim \chi^2 [f_1, 0] \quad (4.58)$$

so daß der Quotient

$$F = \frac{\Delta\Omega_r}{\Delta f_r \cdot {}_1s_0^2} \quad (4.59)$$

unter der Nullhypothese einer zentralen F-Verteilung mit Δf_r Freiheitsgraden im Zähler und f_1 Freiheitsgraden im Nenner angehört,

$$F \sim F_{(\Delta f_r, f_1)} \quad (4.60)$$

Durch Vergleich der Testgröße F mit der Signifikanzschwelle $F_{\alpha(\Delta f_r, f_1)}$ wird über Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese entschieden.

4.3.4 Abrißartiger Vergleich mit der diskreten Kalman-Filterung

Die Kalman-Filterung basiert ebenfalls auf der sequentiellen Parameterschätzung, so daß sich algebraisch Parallelen zu dem vorgestellten Deformationsanalyseverfahren feststellen lassen. Beide Verfahren unterscheiden sich aber prinzipiell in ihrer Modellvorstellung.

Bei der Kalman-Filterung wird von einem dynamischen System in diskreter Zeit ausgegangen, das durch die Systemgleichung

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{D}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1} \quad (4.61)$$

beschrieben werde. Diese Gleichung enthält die Gesetzmäßigkeit, nach der der Zustandsvektor \mathbf{x} des Systems von einem Zeitpunkt in den anderen zu transformieren ist. \mathbf{D} ist eine bekannte Koeffizientenmatrix und \mathbf{w} ein Zufallsvektor unbekannter Störgröße, die als Resultat eines stochastischen Prozesses $\{\mathbf{w}_t\}$ verändernd auf das System einwirken. Es gelte $E(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ und $\text{Var}(\mathbf{w}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ww}$. Der Zustandsvektor \mathbf{x} ist vergleichbar mit dem Parametervektor in (4.45), so daß, wenn in allen Epochen die Parameter unverändert beibehalten werden, die Matrix \mathbf{D} gleich der Einheitsmatrix ist. Der Zustandsvektor \mathbf{x}_t zum Zeitpunkt t ist indirekt über die Meßgleichung (\mathbf{A}_t - bekannte Koeffizientenmatrix)

$$\mathbf{y}_t - e_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t \quad , \quad (4.62)$$

die hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit als von Hause aus linear angenommen wird, beobachtet worden. Die Meßfehler e und die Systemfehler \mathbf{w} seien unkorreliert. Für den Zustandsvektor \mathbf{x}_{t-1} liegt die Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$ mit der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_{t-1} vor. Faßt man alle vorliegenden Informationen zusammen, so erhält man die Schätzung für den aktuellen Zustandsvektor \mathbf{x}_t durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate [BRAMMER 1971] in dem Modell

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t + \mathbf{v}_t &= \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + (\bar{\mathbf{v}}_x)_t &= \mathbf{E} \hat{\mathbf{x}}_t \end{aligned} \quad (4.63)$$

mit $\mathbf{v}_t = -\hat{e}_t$ und $(\bar{\mathbf{v}}_x)_t = \hat{\mathbf{w}}_{t-1} + (\mathbf{v}_x)_t$. Dazu gehört die Gewichtsmatrix (alle Matrizen seien regulär vorausgesetzt)

$$\mathbf{P}_t = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{e_t e_t}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{t-1} + \mathbf{Q}_{w_{t-1} w_{t-1}})^{-1} \end{array} \right) . \quad (4.64)$$

Der Vergleich mit dem Deformationsanalysemodell (4.45) zeigt, daß bei der Kalman-Filterung der Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t$ des durch $\{\mathbf{w}\}$ gestörten Systems zum je-

weiligen Zeitpunkt t geschätzt wird. Es wird prinzipiell eine Änderung der Eigenschaften des beobachteten Systems (Objektes) mit der Zeit zugelassen. Im Gegensatz dazu wird bei dem Generalisierungsmodell für die Deformationsanalyse von einem ungestörten System ausgegangen. Die mit jeder Rekursionsstufe verbesserte Parameterschätzung beschreibt repräsentativ das Objektverhalten über den gesamten betrachteten Zeitraum und gilt auch für Zeitpunkte, an denen nicht beobachtet worden ist. Die Vernachlässigung nicht erfaßbarer Systemparameter führt zu der Erweiterung der Beobachtungsgleichungen um die Zufallsparameter z .

4.3.5 Der Sonderfall einer Mehrepochenanalyse ohne Trendfunktion

Die Auswertung in einem Modell ohne Trendfunktion, $p = 0$, ergibt sich durch Spezialisierung des Gleichungssystems (4.45):

$$\begin{aligned} y_k + (\bar{v}_k)_r &= E \hat{y}_r \\ \hat{y}_{r-1} + (v_{\bar{y}})_r &= E \hat{y}_r \end{aligned}, \quad P_r = \begin{pmatrix} P_{y_k y_k} & 0 \\ 0 & N_{r-1} \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Der Parametervektor \hat{y}_r ist der über all k Epochen 'gemittelte' Vektor der Punktkoordinaten. Betrachtet man formal die Vektoren \hat{y}_{r-1} und y_k als Koordinatenvektor zweier aufeinanderfolgender Beobachtungsepochen und bildet den Vektor der Punktlageänderungen

$$y = y_k - \hat{y}_{r-1}, \quad (4.66)$$

so läßt sich (4.65) in eine (3.133) entsprechende Darstellung

$$y + \bar{v} = 0, \quad P_{yy} \quad (4.67)$$

überführen. P_{yy} ist die Inverse der durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf (4.66) entstehenden Kofaktorenmatrix. In diesem Modell können nach dem im Kapitel 3.2.2 für das Zweiepochenmodell beschriebenen Verfahren signifikante Einzelpunktbewegungen zwischen Epoche $k-1$ und Epoche k lokalisiert werden. Die Varianzkomponentenschätzung entfällt bei der Mehrepochenanalyse, da die Varianzfaktoren für die Zufallsparameter aus vorangegangenen Epochen bereits zuverlässig bekannt sind.

5. Numerische Beispiele

In diesem Kapitel werden exemplarisch die Ergebnisse einiger Deformationsanalysen vorgestellt, um die Vorgehensweise und die Wirksamkeit des beschriebenen Analyseverfahrens mit gemischten Modellen zu demonstrieren. Als Beispiele für die Zweiepochenanalyse werden ein simuliertes zweidimensionales Netz und ein dreidimensional gemessenes Staudammüberwachungsnetz ausgewertet. Der Ablauf einer Mehrepochenanalyse wird anhand von sechs Epochen desselben Staudammnetzes gezeigt, wobei jedoch nur die Höhenänderungen während des ersten Probestatus betrachtet werden.

5.1 Zweiepochenanalyse

5.1.1 Simuliertes zweidimensionales Netz

Ein vorgegebenes Netz, bestehend aus 13 regelmäßig angeordneten Objektpunkten sei zu zwei verschiedenen Epochen durch reine Streckenmessung beobachtet worden. Die Anordnung der Punkte, die Punktentfernungen und die einge-

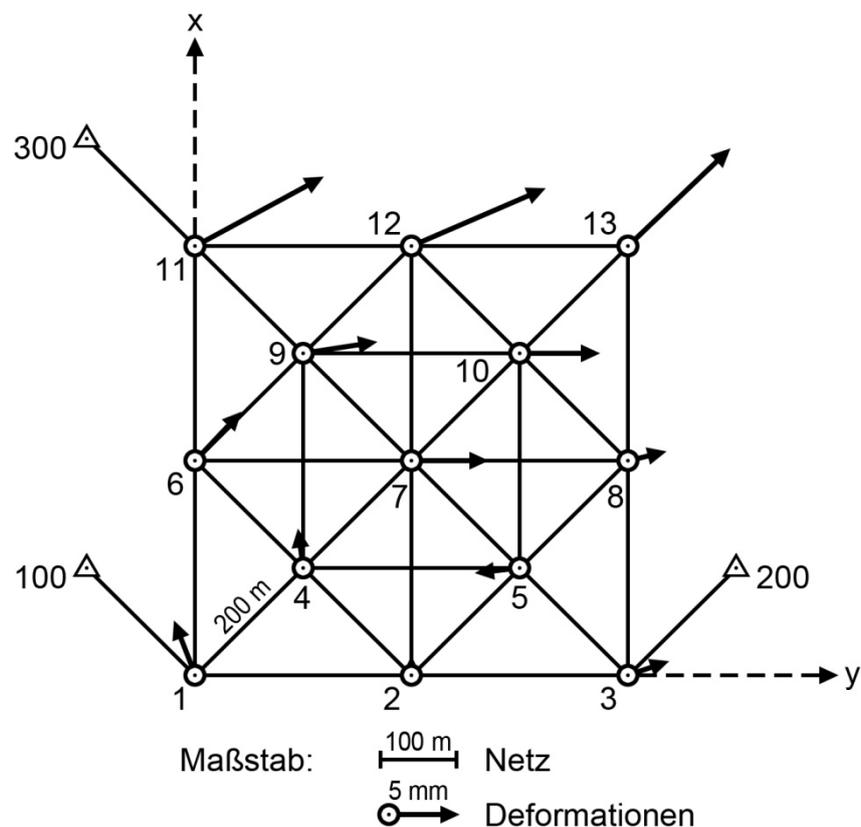


Abbildung 8 Simuliertes Lagenetz mit Deformationsvektoren

fürten Streckenbeobachtungen sind aus Abbildung 8 zu ersehen. Die Punkte 100, 200 und 300 sind Festpunkte und bestimmen das Datum des Netzes. Aus den sich bei dieser Anordnung ergebenden Sollkoordinaten werden die Sollbeobachtungen für die erste Epoche berechnet. Die Istbeobachtungen ergeben sich aus den Sollbeobachtungen durch Addition der Meßfehler, die einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der Standardabweichung $\sigma = \pm 1$ mm entnommen wurden. Bei 35 Beobachtungen und 26 Koordinatenunbekannten ergibt sich ein Freiheitsgrad von $f = 9$ in jeder Beobachtungsepoche. Die Längen der Halbachsen der mittleren Fehlerellipsen a posteriori betragen zwischen 1,5 und 3 Millimetern.

Die Sollkoordinaten der Objektpunkte für die zweite Epoche wurden gegenüber den Sollkoordinaten der ersten Epoche durch eine Translation in x-Richtung von

$$\Delta x_T = + 3 \text{ mm} = a_6$$

und durch eine Scherung bezüglich der y-Achse von

$$\Delta y_S = + 10,606 \text{ mm/km} \cdot x_{[\text{km}]} = a_1 \cdot x$$

verändert. Zusätzlich wurden an den Punkten 5 und 13 Einzelpunktverschiebungen in der Größe

$$d\Delta y_5 = - 2,2 \text{ mm}$$

und

$$d\Delta x_{13} = + 7,8 \text{ mm}$$

simuliert. Zu diesen deterministisch bestimmten Koordinatendifferenzen wurden schließlich Zufallsvariable z_i addiert, die wie die Meßfehler einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der Standardabweichung $\sigma = \pm 1$ mm entnommen sind. Mit den sich so ergebenden Sollkoordinaten wurden wie für die erste Epoche die Istbeobachtungen berechnet. Tabelle 1 enthält die Gegenüberstellung der sich aus den Sollkoordinaten beider Epochen ergebenden Solldifferenzen und der sich aus den beiden Netzausgleichungen ergebenden Istdifferenzen.

Die aus den Istdifferenzen resultierenden Punktverschiebungen sind in das Netzbild (Abb. 8) eingezeichnet.

Punkt Nr.	Soll Differenzen [mm]		Ist Differenzen [mm]	
	$\overline{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	Δy	Δx
1	- 0,7	+ 3,6	- 0,9	+ 3,5
2	0,0	+ 3,4	- 0,2	+ 0,7
3	0,0	+ 2,2	+ 1,5	+ 0,8
4	- 0,7	+ 3,9	- 0,3	+ 2,3
5	0,0	+ 2,4	- 2,5	- 0,3
6	+ 2,3	+ 3,4	+ 3,1	+ 3,4
7	+ 4,6	+ 1,7	+ 4,7	+ 0,4
8	+ 2,9	+ 4,1	+ 2,4	+ 0,8
9	+ 5,4	+ 2,2	+ 4,7	+ 0,6
10	+ 4,9	+ 1,3	+ 5,2	+ 0,2
11	+ 6,7	+ 3,0	+ 8,4	+ 4,7
12	+ 6,6	+ 4,8	+ 8,6	+ 3,6
13	+ 6,3	+ 10,0	+ 7,2	+ 7,0

Tabelle 1: Gegenüberstellung der simulierten Sollkoordinaten- und der geschätzten Istkoordinatendifferenzen

Im folgenden werden die bei der Analyse des Deformationsvektors zu durchlaufenden Arbeitsschritte und die Ergebnisse tabellarisch zusammengestellt. Für die Globaltests nach Kapitel 3.2.1 wird jeweils ein Signifikanzniveau von $S = 95\%$ gewählt. Die bei den multiplen Tests auftretenden Einzeltests werden mit den Sicherheitswahrscheinlichkeiten $S = 99,5\%$ für die Ausreißertests und mit $S = 99\%$ für die Signifikanztests der Trendparameter durchgeführt. Damit bleiben die nach (3.96) zu berechnenden Gesamtsicherheitswahrscheinlichkeiten zwischen 90% und 95% .

- Netzausgleich Epoche 1 : $(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})_1 = 9,00$; $n_1 - u_1 = 9$
Epoche 2 : $(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})_2 = 8,91$; $n_1 - u_1 = 9$

Schätzung der a posteriori Varianz der Gewichtseinheit nach (3.14)

$${}_1s_0^2 = \frac{9,00 + 8,91}{9 + 9} = 0,995 \quad ; \quad f_1 = 18$$

- Berechnung des Differenzenvektors und der Kofaktorenmatrix nach (3.10) und (3.11)

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Q}_{ee} = \mathbf{Q}_{y_1 y_1} + \mathbf{Q}_{y_2 y_2}$$

- Globaltest nach (3.59) - (3.64)

$$q_2 = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{y} = 204,66$$

$${}_2s_0^2 = \frac{204,66}{26} = 7,87$$

$$f_2 = \text{rg}(\mathbf{Q}_{ee}) = 26$$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{{}_2s_0^2}{{}_1s_0^2} = 7,9$$

$$\text{Signifikanzschwelle: } F_{5\%(26,18)} = 2,1$$

Wegen $F > F_{5\%}$ wird die Nullhypothese, es haben keine Punktverschiebungen stattgefunden, verworfen.

- Generalisierungsmodell (Polynomansatz 1. Ordnung)

$$\Delta y_i - e_{y_i} = a_1 x_i + a_3 y_i + a_5 + s_{y_i}$$

$$\Delta x_i - e_{x_i} = a_2 x_i + a_4 y_i + a_6 + s_{x_i}$$

$$0_{y_i} + z_{y_i} = s_{y_i}$$

$$0_{x_i} + z_{x_i} = s_{x_i}$$

$$, \quad \mathcal{P}_{ee} = \mathbf{Q}_{ee}^{-1}$$

$$, \quad \mathcal{P}_{zz} = \mathbf{Q}_{zz}^{-1}$$

(5.1)

allgemein

$$\mathbf{y} - \mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s}, \quad \mathcal{P}_{ee}$$

$$\mathbf{0}_{x_i} + \mathbf{z}_{x_i} = \mathbf{s}, \quad \mathcal{P}_{zz}$$

mit

$$\mathbf{x}^T = (a_1, a_2, \dots, a_6)$$

- Ausgleichung im Generalisierungsmodell ohne Zufallsparameter ($\mathbf{Q}_{zz} = \mathbf{0}, \mathbf{z} = \mathbf{0}$) nach (3.65) - (3.67)

$$q_3 = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}$$

$$150,97 = 204,66 - 53,69$$

$$f_3 = \text{rg}(\mathbf{Q}_{ee}) - u = 20$$

$${}_3s_0^2 = \frac{150,97}{20} = 7,55$$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{{}_3s_0^2}{{}_1s_0^2} = 7,6 \quad \text{Signifikanzschwelle: } F_{5\%(20,18)} = 2,2$$

Wegen $F > F_{5\%}$ wird das Modell verworfen und auf das gemischte Modell (5.1) mit $\mathbf{Q}_{zz} \neq \mathbf{0}$ übergegangen.

- Ausgleichung und Analyse im gemischten Generalisierungsmodell nach Kapitel 3.2.2

Varianzkomponentenschätzung nach (3.70) - (3.74)

$$\mathcal{K}_{zz} = \mathbf{E} , \quad (\mathcal{P}_{zz})_v = \frac{{}_1s_0^2}{c_v} \cdot \mathbf{E}$$

Iterationsindex v	0	1	2	3	4
$s_0^2(\hat{\mathbf{Z}})_v$	/	3,93	1,69	1,14	1,03
c_v	0,33	1,30	2,21	2,53	2,62

Tabelle 2: Iterationen zur Varianzkomponentenschätzung vor der Lokalisierung

Letzte Ausgleichung mit $\mathcal{P}_{zz} = 0,38 \cdot \mathbf{E} : \Omega = 20,79 ; f = 20 ; s_0^2 = 1,04$

Lokalisierung von Einzelpunktbewegungen (Ausreißertests) nach (3.84) - (3.96)

maximaler Anteil u_1^2 für Punkt 13: $u_{13}^2 = 8,13$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{u_{13}^2}{2} \Big/ \frac{\Omega - u_{13}^2}{20 - 2} = 5,8 \quad \text{Signifikanzschwelle: } F_{0,5\%(2,18)} = 7,2$$

Obwohl die Signifikanzschwelle $F_{0,5\%}$ nicht überschritten wird, wird, wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben, die Suche nach Ausreißern fortgesetzt. Dazu wird ohne erneute Varianzkomponentenschätzung nach Überführung der Zufallsparameter für den Punkt 13 in den deterministischen Teil des Mo-

dells [gemäß (3.95)] eine Neuausgleichung durchgeführt. Anschließend werden für die verbleibenden 12 Punkte die Anteile u_i^2 berechnet.

maximaler Anteil u_i^2 für Punkt 5 : $u_5^2 = 5,13$

gemeinsamer Anteil für die Punkte 13 und 5 : $u_{13,5}^2 = u_{13}^2 + u_5^2 = 13,26$

Testgröße: $F = \frac{u_{13,5}^2}{4} / \frac{\Omega - u_{13,5}^2}{20 - 4} = 7,0$ Signifikanzschwelle: $F_{0,5\%(4,16)} = 5,6$

Da der Schwellenwert $F_{0,5\%}$ überschritten wird, werden die Punkte 5 und 13 als Ausreißer betrachtet und ihre Abweichungen vom Generalisierungsmodell wie deterministische Größen mit unbekanntem Erwartungswert behandelt.

Die Analyse wird in dem folgenden Modell weitergeführt ($\mathbf{0}$, \mathbf{E} - Null-, bzw. Einheitsmatrizen passender Ordnung):

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - \mathbf{e} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{s} \quad , \quad \mathcal{P}_{ee} = \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \\ \mathbf{0}_z + \mathbf{z} &= \quad \quad \quad \mathbf{s} \quad , \quad \mathcal{P}_{zz} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \end{aligned} \tag{5.2}$$

mit $\Delta^T = (\Delta_{y_5}, \Delta_{x_5}, \Delta_{y_{13}}, \Delta_{x_{13}})$

Varianzkomponentenschätzung

$$\mathcal{K}_{zz} = \mathbf{E} \quad , \quad (\mathcal{P}_{zz})_v = \frac{1 \cdot s_0^2}{c_v} \cdot \mathbf{E}$$

Iterationsindex v	0	1	2	3
$s_0^2(\hat{\mathbf{z}})_v$	/	0,45	0,84	0,95
c_v	2,62	1,17	0,99	0,95

Tabelle 3: Iterationen zur Varianzkomponentenschätzung nach der Lokalisierung

Letzte Ausgleichung mit $\mathcal{P}_{zz} = 1,05 \cdot \mathbf{E} : \Omega = 15,99$; $f = 16$; $s_0^2 = 1,00$

Es sind keine weiteren Einzelpunktverschiebungen lokalisierbar (alle weiteren Testgrößen bleiben unterhalb der Signifikanzschwelle), so daß die Nullhypothese $E(\hat{x}) = \mathbf{0}$ angenommen wird.

- zum Vergleich: a posteriori Varianzschätzung im Modell (5.2) ohne Zufallsparameter ($Q_{zz} = \mathbf{0}, z = \mathbf{0}$) nach Kapitel 3.2.3

$$\Omega_F = \Omega + \hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x}$$

$$58,42 = 15,99 + 42,43 \qquad \qquad \qquad {}_3s_0^2 = 3,65 \quad , \quad f = 16$$

- Signifikanztests der Trendparameter durch Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche nach Kapitel 3.2.4

Ergebnis der Parameterschätzung \hat{x} im gemischten Modell (5.2)

\hat{a}_1 [mm/km]	\hat{a}_2 [mm/km]	\hat{a}_3 [mm/km]	\hat{a}_4 [mm/km]	\hat{a}_5 [mm/km]	\hat{a}_6 [mm/km]
+ 15,5	+ 1,4	+ 1,4	- 6,2	- 0,04	+ 4,1
± 4,5	± 1,9	± 2,0	± 5,3	± 1,6	± 2,3

Tabelle 4: Trendparameter und mittlere Fehler

Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche nach (3.113) - (3.124)

Zerlegung von $\hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} = 18,016$

Berechnungsfolge:	6	5	4	3	2	1	Parameter
Parameter	r_1^2	r_2^2	r_3^2	r_4^2	r_5^2	r_6^2	
a_1	11,146	14,911	12,123	12,634	13,156	11,812	a_1
a_2					0,540	0,518	a_2
a_3				0,633	0,589	0,509	a_3
a_4			1,688	2,095	2,186	1,393	a_4
a_5						0,001	a_5
a_6		4,008	5,106	5,455	4,890	3,001	a_6

Tabelle 5: Cholesky-Zerlegung der quadratischen Form $\hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} = r^T r$

Mit diesem Ergebnis gilt die folgende Zerlegung

$$\hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} = (r_1^2)_{a_1} + (r_2^2)_{a_6} + (r_3^2)_{a_4} + (r_4^2)_{a_3} + (r_5^2)_{a_2} + (r_6^2)_{a_5}$$

$$18,016 = 11,146 + 4,008 + 1,688 + 0,633 + 0,540 + 0,001$$

Signifikanztests nach (3.125) - (3.130)

Testgröße: $F = \frac{r_i^2}{s_0^2}$ Schwellenwert: $F_{1\%(1,18)} = 8,3$

Parameter	a ₁	a ₆	a ₄	a ₃	a ₂	a ₅
i	1	2	3	4	5	6
r _i ²	11,146	4,008	1,688	0,633	0,540	0,001
F _i	11,2	4,0	1,7	0,6	0,5	0
	> F _{1%}	< F _{1%}				

Tabelle 6: Signifikanztests der Trendparameter

signifikanter Parameter: $x_I^T = (a_1)$

nicht signifikante Parameter: $x_{II}^T = (a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

endgültiges Ausgleichungsmodell mit den neu zu schätzenden Parametervektoren x_I , Δ und s :

$$y - e = \mathcal{A}_I x_I + \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} s, \quad P_{ee} \tag{5.3}$$

$$0_z + z = s, \quad P_{zz} = 1,05 \cdot E$$

- Ausgleichung gemäß (5.3)

$\hat{\Delta}_{y_5}$ [mm]	$\hat{\Delta}_{x_5}$ [mm]	$\hat{\Delta}_{y_{13}}$ [mm]	$\hat{\Delta}_{x_{13}}$ [mm]	\hat{a}_1 [mm/km]
- 3,97	-0,82	- 0,4	+ 7,0	+ 8,3
± 0,76	± 0,77	± 1,2	± 1,1	± 2,6

Tabelle 7: Einzelpunktverschiebungen, signifikante Trendparameter und mittlerer Fehler

$$\bar{Q} = Q + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2$$

$$22,856 = 15,986 + 4,008 + 1,688 + 0,633 + 0,540 + 0,001$$

$$\bar{f} = f + 5 = 21$$

$$s_0^2 = 22,856/21 = 1,09$$

$$s_0 = \pm 1,04$$

Größenordnung der Modellrestfehler:

$$s_z^2 = {}_1s_0^2/1,05 = 0,95 \text{ mm}^2$$

$$s_z = \pm 0,97 \text{ mm}$$

- Zusammenstellung der Ergebnisse

	Simulation [Soll]	Analyseergebnis [Ist]
Translationsparameter	$a_6 = + 3 \text{ mm}$	nicht signifikant [$\hat{a}_6 = (+ 4,1 \pm 2,3) \text{ mm}$]*
Scherungsparameter	$a_1 = + 10,606 \text{ mm/km}$	$\hat{a}_1 = (+ 8,3 \pm 2,6) \text{ mm/km}$
Einzelpunkt- verschiebungen	$\Delta_{y_5} = - 2,2 \text{ mm}$ $\Delta_{x_5} = 0,0 \text{ mm}$ $\Delta_{y_{13}} = 0,0 \text{ mm}$ $\Delta_{x_{13}} = + 7,8 \text{ mm}$	$\hat{\Delta}_{y_5} = - (4,0 \pm 0,8) \text{ mm}$ $\hat{\Delta}_{x_5} = - (0,8 \pm 0,8) \text{ mm}$ $\hat{\Delta}_{y_{13}} = - (0,4 \pm 1,2) \text{ mm}$ $\hat{\Delta}_{x_{13}} = - (7,0 \pm 1,1) \text{ mm}$
Standardabweichung der Modellrestfehler	$\sigma_z = \pm 1 \text{ mm}$	$s_z = \pm 0,97 \text{ mm}$
Varianz der Gewichtseinheit	$\sigma_0^2 = 1$	$s_0^2 = 1,09$

Tabelle 8: Gegenüberstellung der simulierten Vorgaben und der Analyseergebnisse
(* Ergebnis für \hat{a}_6 vor Signifikanzuntersuchungen)

Der Vergleich der Ergebnisse mit den simulierten Vorgaben zeigt, daß einmal die Einzelpunktverschiebungen erkannt und größenordnungsmäßig richtig geschätzt werden und daß zum anderen die Schätzung für die Varianz der Mo-

dellrestfehler gut mit dem Ausgangsmaterial übereinstimmt. Von den eingegebenen Trendparametern erweist sich die Translation in x-Richtung im Rahmen der vorgegebenen Meßgenauigkeiten als nicht signifikant, während der Scheinungsparameter gut reproduziert wird.

5.1.2 Dreidimensional gemessenes Staudammüberwachungsnetz

Das auf dem 61 m hohen Steinschüttdamm der Trinkwassertalsperre Mauthaus in Oberfranken angelegte Netz von Kontrollpunkten ist zur Überwachung der beim ersten Probestau auftretenden Bewegungen der Dammoberfläche in Abständen von wenigen Monaten lage- und höhenmäßig beobachtet worden. Eine Beschreibung der Talsperre aus bautechnischer und wasserwirtschaftlicher Sicht findet man bei LORENZ/SEETHALER (1970). Zur Auswertung werden hier nur die Lage- und Höhenänderungen der insgesamt 18 dauerhaft vermarkten Objektpunkte des luftseitigen Staudammkörpers herangezogen. Die Verteilung der Punkte auf der Dammoberfläche ist der schematischen, perspektivischen Zeichnung (Abbildung 9) zu entnehmen.

Als Beispiel für eine Zweiepochenanalyse werden die kurz nach Fertigstellung des Dammes Ende Februar 1972 bei einem Wasserstand von -37,5 m (bezogen auf die Dammkrone) nivellierten Höhenunterschiede und die Mitte April 1972 bei einem Wasserstand von -28,5 m zur Bestimmung der Lagekoordinaten gemessenen Strecken zu den Beobachtungen der ersten Epoche zusammengefaßt. Die zweite Epoche ist Anfang Juli (Lage) und Anfang August 1972 (Höhe) bei einem Wasserstand von jeweils -20,5 m beobachtet worden.

Die Höhen sind mit einem Zeiss Ni 2 und einer 1-cm-Holzlatte und die Strecken mit einem Tellurometer MA 100 gemessen worden. Sämtliche Objektpunkte sind bis auf zwei Ausnahmen (Punkt 20 und Punkt 24) lediglich von zwei außerhalb des Staudambereichs liegenden Anschlußpunkten aus angemessen worden, so daß keine Kontrollmöglichkeit für die Lagebestimmung besteht. Die Streckenlängen betragen ca. 200 m. Die Höhen sind an in die Felsflanken eingebrachte Höhenbolzen angeschlossen und ebenfalls schlecht kontrolliert. Wegen der geringen Zahl an Überbestimmungen war aus den Netzausgleichungen keine zuverlässige Schätzung der a posteriori Varianzen zu erhalten. Die a priori eingeführten Standardabweichungen betragen für die Streckenmessungen $\sigma_s = \pm 2 \text{ mm}$ und für die Höhenmessungen unter Berücksichtigung des schwierigen, steilen Geländes $\sigma_h = \pm 3,5 \frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}$.

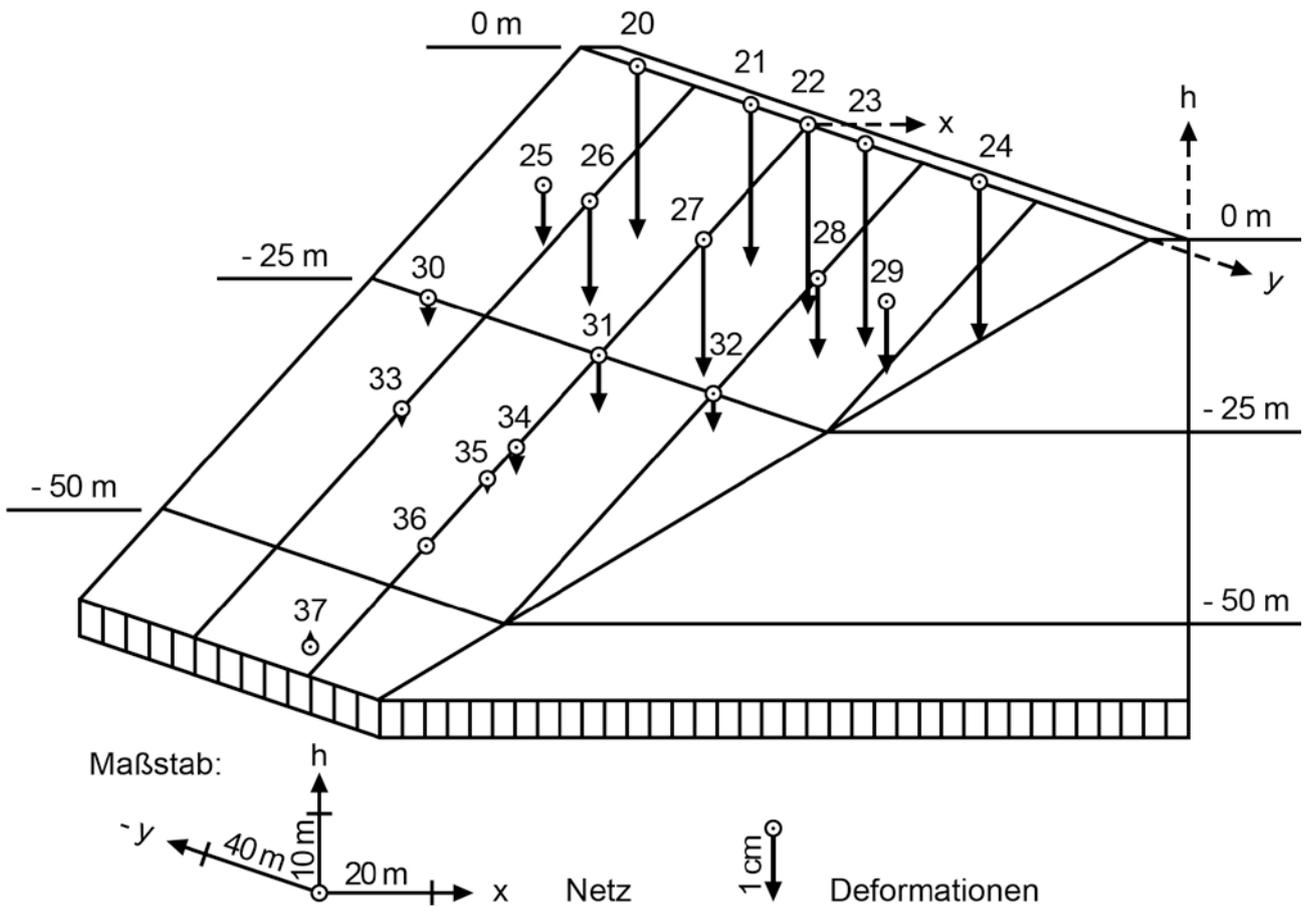


Abbildung 9 Lage der Objektpunkte auf der Dammoberfläche und beobachtete Höhenänderungen

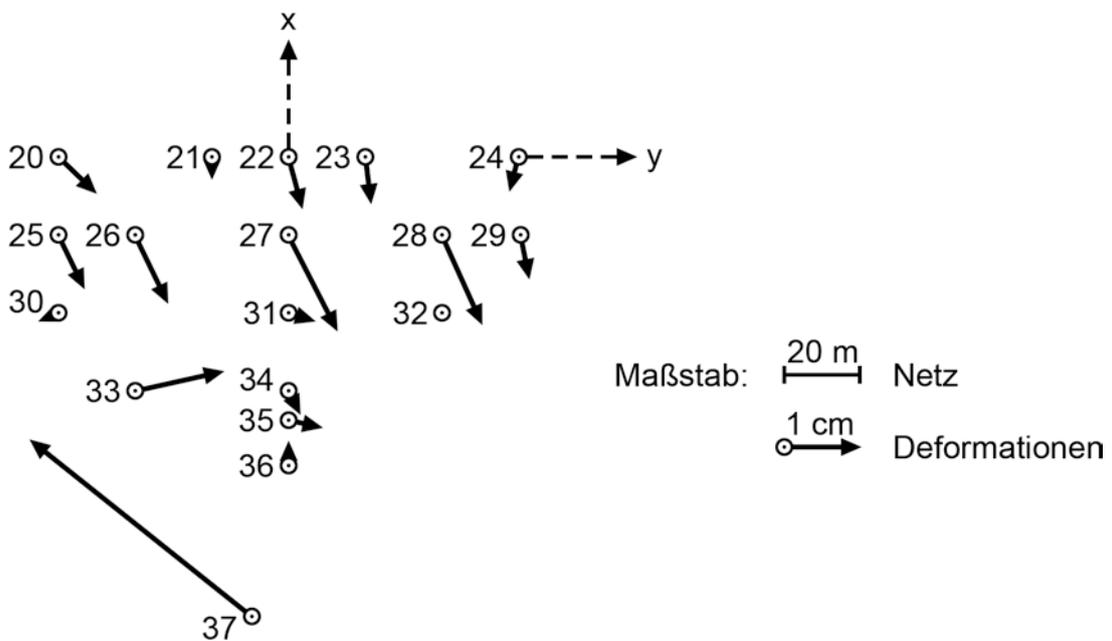


Abbildung 10 Beobachtete Verschiebungen der Objektpunkte in der xy -Ebene

Diese Werte werden für die weiteren Analysen als wahre Werte ($f = \infty$) unterstellt. Die mit diesen Annahmen aus den Netzausgleichungen resultierenden Längen der Halbachsen der Fehlerellipsen für die Objektpunkte betragen zwischen 2 mm und 4 mm, wobei die kleineren Halbachsen hauptsächlich in die x-Richtung weisen. Die mittleren Höhenfehler liegen in jeder Epoche zwischen $\pm 1,0$ mm und $\pm 1,5$ mm. Die Ausgleichungen und die anschließende Deformationsanalyse erfolgten gemeinsam für alle drei Koordinatenkomponenten. Da die Lage- und die Höhenbestimmung nicht korreliert sind, wäre auch eine getrennte Bearbeitung möglich gewesen.

Da über die Natur der Modellrestfehler in dem unten vorgestellten Generalisierungsmodell keine Aussage getroffen werden kann, wird als Korrelationsmatrix \mathcal{K}_{zz} die Einheitsmatrix gewählt.

Die Ergebnisse der Deformationsanalyse beider Beobachtungsepochen werden im folgenden Schritt für Schritt tabellarisch zusammengestellt. Die Signifikanzschwelle für die Parametertests wird wegen der gegenüber Beispiel 5.1.1 größeren Parameterzahl für $S = 99,5\%$ gebildet, während die übrigen Sicherheitswahrscheinlichkeiten aus Beispiel 5.1.1 beibehalten werden.

- Berechnung des Vektors \mathbf{y} der Punktverschiebungen und der Kofaktorenmatrix \mathcal{Q}_{ee} aus den ausgeglichenen Koordinaten beider Epochen und deren Kofaktorenmatrix nach (3.10) und (3.11)

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta x \\ \Delta h \end{pmatrix} ; \quad \mathcal{Q}_{ee} = \mathcal{Q}_{y_1 y_1} + \mathcal{Q}_{y_2 y_2}$$

$${}_1s_0^2 = \sigma_0^2 = 1 \quad , \quad f_1 = \infty$$

Die Höhenänderungen Δh_i von Epoche 1 nach Epoche 2 sind in Abbildung 9 und die aus den Koordinatendifferenzen Δy_i und Δx_i folgenden Punktverschiebungen sind in Abbildung 10 dargestellt.

- Globaltest nach (3.59) - (3.64)

$$q_2 = \mathbf{y}^T \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{y} = 727,03$$

$${}_2s_0^2 = \frac{727,03}{54} = 13,5$$

$$f_2 = \text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) = 54$$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{2s_0^2}{\sigma_0^2} = 13,5 \quad \text{Signifikanzschwelle: } F_{5\%(54,\infty)} = 1,3$$

Wegen $F > F_{5\%}$ wird die Nullhypothese, es haben keine Punktverschiebungen stattgefunden, verworfen.

- Generalisierungsmodell

Bei SCHÖBER (1975) sind einige allgemeingültige Schlußfolgerungen über das Verhalten von Steinschüttdämmen angegeben, die als Grundlage für die Modellierung des Generalisierungsansatzes herangezogen werden konnten. Danach resultiert die allgemeine Bewegung der Dammoberfläche aus der Überlagerung zweier Kriechbewegungen von den Hängen zur Talmitte und von der Dammkrone zum Dammfuß. Die Beträge der Verschiebungsvektoren zeigen von der Dammkrone zum Dammfuß und von der Dammitte zu den Flanken abnehmende Tendenz. Die Setzungen nehmen ebenfalls an der Krone und in der Dammitte ihre größten Beträge an und werden zum Dammfuß und zu den Flanken hin kleiner

Die aus einer solchen Bewegung sich ergebenden Punktverschiebungen zwischen zwei Beobachtungsepochen können durch den folgenden, leicht modifizierten Polynomansatz 2. Ordnung generalisiert werden. Der Ursprung des Koordinatensystems fällt mit dem Punkt 22 auf der Dammkrone zusammen. In der Gleichung für Δy_i sind die Koeffizienten von a_7 und a_{16} gleich Null, wenn $y = 0$ gilt (alle Punkte in der Dammitte):

$$\begin{aligned} \Delta y_i - e_{y_i} &= a_1 + a_4 y_i + a_7 h_i \left\{ \begin{array}{c} \cdot \text{sign}(y_i) \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right\} + a_{10} y_i^2 \cdot \text{sign}(y_i) + \\ &\quad + a_{13} h_i y_i + a_{16} h_i^2 \left\{ \begin{array}{c} \cdot \text{sign}(y_i) \\ \cdot \\ 0 \end{array} \right\} + s_{y_i} \\ \Delta x_i - e_{x_i} &= a_2 + a_5 |y_i| + a_8 h_i + a_{11} y_i^2 + \\ &\quad + a_{14} h_i |y_i| + a_{17} h_i^2 + s_{x_i}, \quad \mathcal{P}_{ee} = \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \\ \Delta h_i - e_{h_i} &= a_3 + a_6 |y_i| + a_9 h_i + a_{12} y_i^2 + \\ &\quad + a_{15} h_i |y_i| + a_{18} h_i^2 + s_{h_i} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
 0_{y_i} + z_{y_i} &= & s_{y_i} & & (5.4) \\
 0_{x_i} + z_{x_i} &= & s_{x_i} & , \quad \mathcal{P}_{zz} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1} \\
 0_{h_i} + z_{h_i} &= & s_{h_i} &
 \end{aligned}$$

allgemein

$$y - e = Ax + s \quad , \quad \mathcal{P}_{ee} = \mathcal{Q}_{ee}^{-1}$$

$$\mathcal{O}_z + z = s \quad , \quad \mathcal{P}_{zz} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1}$$

mit $x^T = (a_1, a_2, \dots, a_{18})$

- Ausgleichung im Generalisierungsmodell ohne Zufallsparameter
($\mathcal{Q}_{zz} = \mathbf{0}, z = \mathbf{0}$) nach (3.65) - (3.67)

$$q_3 = y^T \mathcal{Q}_{ee}^{-1} y - \hat{x}^T \mathcal{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x}$$

$$145,95 = 727,03 - 581,08$$

$${}_3s_0^2 = \frac{145,95}{36} = 4,1$$

$$f_3 = \text{rg}(\mathcal{Q}_{ee}) \cdot u = 54 \cdot 18 = 36$$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{{}_3s_0^2}{\sigma_0^2} = 4,1 \quad \text{Signifikanzschwelle: } F_{5\%(36, \infty)} = 1,4$$

Wegen $F > F_{5\%}$ wird das Modell verworfen und auf das gemischte Modell (5.4) mit $\mathcal{Q}_{zz} \neq \mathbf{0}$ übergegangen.

- Ausgleichung und Analyse im gemischten Generalisierungsmodell
nach Kapitel 3.2.2

Varianzkomponentenschätzung nach (3.70) - (3.74)

Für die Lage- und Höhenkomponenten werden unterschiedliche Schätzungen zugelassen ($c_x = c_y \neq c_h$):

$$\mathcal{K}_{zz} = \mathbf{E} ; \text{ Lage } \left(l = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \right) : (\mathcal{P}_{z_1 z_1})_v = \frac{\sigma_0^2}{(c_1)_v} \cdot \mathbf{E} ;$$

$$\text{Höhe} : (\mathcal{P}_{z_h z_h})_v = \frac{\sigma_0^2}{(c_h)_v} \cdot \mathbf{E}$$

Iterations- index v	0	1	2	3	4	5	6
$s_0^2(\hat{z}_1)_v$	/	4,28	2,31	1,43	1,17	1,07	1,03
$(c_1)_v$	1	4,28	9,89	14,14	16,55	17,71	18,24
$s_0^2(\hat{z}_h)_v$	/	2,02	1,22	1,05	1,01	1,00	1,00
$(c_h)_v$	1	2,02	2,46	2,58	2,61	2,61	2,61

Tabelle 8: Iterationen zur Varianzkomponentenschätzung vor der Lokalisierung

Letzte Gleichung mit $\mathcal{P}_{z_1 z_1} = 0,06 \cdot \mathbf{E}$ und $\mathcal{P}_{z_h z_h} = 0,38 \cdot \mathbf{E}$

$$\Omega = 40,77 \quad ; \quad f = 36 \quad ; \quad s_0^2 = 1,13$$

Lokalisierung von Einzelpunktbewegungen (Ausreißertests)
nach (3.84) – (3.96)

maximaler Anteil u_i^2 für Punkt 37 : $u_{37}^2 = 21,82$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{u_{37}^2}{3} / \frac{\Omega - u_{37}^2}{36 - 3} = 12,7$$

Signifikanzschwelle: $F_{0,5\%}(3,33) = 5,2$

Da der Schwellenwert $F_{0,5\%}$ überschritten wird, wird der Punkt 37 als Ausreißer betrachtet, und seine Abweichungen vom Generalisierungsmodell werden wie deterministische Größen mit unbekanntem Erwartungswert behandelt. Die Analyse wird mit dem folgenden Modell weitergeführt (\mathcal{O} , \mathbf{E} – Null- bzw. Einheitsmatrizen passender Ordnung) :

$$\begin{aligned}
 y - e &= Ax + \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} s, & P_{ee} &= Q_{ee}^{-1} \\
 0_z + z &= & s, & P_{zz} &= Q_{zz}^{-1}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

mit $\Delta^T = (\Delta_{y_{37}}, \Delta_{x_{37}}, \Delta_{h_{37}})$

Varianzkomponentenschätzung

$$\mathcal{K}_{zz} = E; \text{ Lage: } (P_{z_1 z_1})_v = \frac{\sigma_0^2}{(c_1)_v} \cdot E; \text{ Höhe: } (P_{z_h z_h})_v = \frac{\sigma_0^2}{(c_h)_v} \cdot E$$

Iterations- index v	0	1	2	3	4	5
$s_0^2(\hat{z}_1)_v$	/	0,38	0,72	0,86	0,93	0,96
$(c_1)_v$	18,24	6,93	4,99	4,29	3,99	3,83
$s_0^2(\hat{z}_h)_v$	/	1,08	1,01	1,00	1,00	1,00
$(c_h)_v$	2,61	2,82	2,85	2,85	2,85	2,85

Tabelle 9: Iterationen zur Varianzkomponentenschätzung nach der Lokalisierung

Letzte Gleichung mit $P_{z_1 z_1} = 0,26 \cdot E$ und $P_{z_h z_h} = 0,35 \cdot E$

$$\Omega = 29,36 \quad ; \quad f = 33 \quad ; \quad s_0^2 = 0,89$$

Es sind keine weiteren Einzelpunktverschiebungen lokalisierbar (alle weiteren Testgrößen bleiben unterhalb der Signifikanzschwelle), so daß die Nullhypothese $E(\hat{z}) = 0$ angenommen wird.

- zum Vergleich: a posteriori Varianzschätzung im Modell (5.2) ohne Zufallsparameter ($Q_{zz} = 0, z = 0$) nach Kapitel 3.2.3

$$\begin{aligned}
 \Omega_F &= \Omega + \hat{s}^T Q_{\hat{s}\hat{s}}^{-1} \hat{s} & {}_3s_0^2 &= 2,33, \quad f = 33 \\
 77,05 &= 29,36 + 47,69
 \end{aligned}$$

- Signifikanztests der Trendparameter durch Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche nach Kapitel 3.2.4

Ergebnis der Parameterschätzung \hat{x} im gemischten Modell (5.5)

[mm]	[mm/m]	[mm/m]	[mm/m ²]	[mm/m ²]	[mm/m ²]	
\hat{a}_1	\hat{a}_4	\hat{a}_7	$\hat{a}_{10} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{13} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{16} \cdot 10^4$: Δy
+ 2,07 ± 0,88	- 0,01 ± 0,16	- 1,05 ± 0,88	- 4 ± 27	+ 120 ± 160	- 220 ± 100	
\hat{a}_2	\hat{a}_5	\hat{a}_8	$\hat{a}_{11} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{14} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{17} \cdot 10^4$: Δx
- 7,3 ± 1,8	+ 0,11 ± 0,11	+ 0,28 ± 0,16	- 10 ± 19	0 ± 13	+ 117 ± 38	
\hat{a}_3	\hat{a}_6	\hat{a}_9	$\hat{a}_{12} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{15} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{18} \cdot 10^4$: Δh
- 26,2 ± 1,9	+ 0,057 ± 0,075	- 0,98 ± 0,14	+ 5 ± 13	- 2,3 ± 9,1	- 90 ± 32	

Tabelle 10: Trendparameter und mittlere Fehler

Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche nach (3.113) - (3.124)

Ergebnis der Zerlegung von $\hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} = \sum_{i=1}^{18} r_i^2$:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}^T Q_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \hat{x} &= (r_1^2)_{a_3} + (r_2^2)_{a_9} + (r_3^2)_{a_2} + (r_4^2)_{a_6} + (r_5^2)_{a_{17}} + (r_6^2)_{a_1} + \\
 &+ (r_7^2)_{a_{18}} + (r_8^2)_{a_{16}} + (r_9^2)_{a_8} + (r_{10}^2)_{a_5} + (r_{11}^2)_{a_7} + (r_{12}^2)_{a_{10}} + \\
 &+ (r_{13}^2)_{a_{13}} + (r_{14}^2)_{a_{11}} + (r_{15}^2)_{a_{12}} + (r_{16}^2)_{a_{15}} + (r_{17}^2)_{a_4} + (r_{18}^2)_{a_{14}} \\
 248,23 &= 62,28 + 96,90 + 30,15 + 16,40 + 15,89 + 8,05 + \\
 &+ 7,10 + 3,28 + 2,33 + 1,87 + 1,37 + 1,47 + \\
 &+ 0,62 + 0,28 + 0,18 + 0,06 + 0,0002 + 6 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

Signifikanztests nach (3.125) - (3.130)

Testgröße: $F = \frac{r_1^2}{\sigma_0^2} = r_1^2$

Schwellenwert: $F_{0,5\%(1,\infty)} = 7,9$

Der Schwellenwert fällt zwischen $(r_6^2)_{a_1}$ und $(r_7^2)_{a_{18}}$, so daß die Variablen r_1^2 bis r_6^2 den signifikanten und r_7^2 bis r_{18}^2 den nicht signifikanten Parametern zuzuordnen sind:

signifikante Parametergruppe: $x_I^T = (a_1, a_2, a_3, a_6, a_9, a_{17})$

nicht signifikante

Parametergruppe: $x_{II}^T = (a_4, a_5, a_7, a_8, a_{10}, \dots, a_{16}, a_{18})$

endgültiges Ausgleichungsmodell mit den neu zu schätzenden Parametervektoren x_I , Δ und $s^T = (s_1^T, s_h^T)$:

$$y - e = \mathcal{A}_I x_I + \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E} \end{pmatrix} s, \quad \mathcal{P}_{ee}$$

$$0_{z_1} + z_1 = s_1, \quad \mathcal{P}_{z_1 z_1} = 0,26 \cdot \mathcal{E} \quad (5.6)$$

$$0_{z_h} + z_h = s_h, \quad \mathcal{P}_{z_h z_h} = 0,35 \cdot \mathcal{E}$$

- Ausgleichung gemäß (5.6)

Einzelparameter:

$\hat{\Delta}_{y_{37}}$	$\hat{\Delta}_{x_{37}}$	$\hat{\Delta}_{h_{37}}$
[mm]	[mm]	[mm]
- 29,6	+ 15,5	- 7,1
± 4,4	± 4,3	± 2,3

Trendparameter:

[mm]	[mm/m]	[mm/m]			[mm/m ²]	
\hat{a}_1						: Δy
+ 2,57 ± 0,93	/	/	/	/	/	
\hat{a}_2					$\hat{a}_{17} \cdot 10^4$: Δx
- 6,9 ± 1,0	/	/	/	/	+ 47 ± 12	
\hat{a}_3	\hat{a}_6	\hat{a}_9				: Δh
- 25,0 ± 2,0	+ 0,095 ± 0,024	- 0,603 ± 0,058	/	/	/	

Tabelle 11: Einzelpunktverschiebungen, signifikante Trendparameter und mittlere Fehler

$$\bar{Q} = Q + \sum_{i=7}^{18} r_i^2$$

$$47,92 = 29,36 + 18,56$$

$$s_0^2 = \frac{47,92}{45} = 1,06$$

$$s_0 = \pm 1,03$$

$$\bar{f} = f + u_{II}$$

$$45 = 33 + 12$$

Größenordnung der Modellrestfehler:

$$\text{Lage: } s_{z_1}^2 = \frac{\sigma_0^2}{0,26} = 3,8 \text{ mm}^2$$

$$s_{z_1} = \pm 1,9 \text{ mm}$$

$$\text{Höhe: } s_{z_h}^2 = \frac{\sigma_0^2}{0,35} = 2,9 \text{ mm}^2$$

$$s_{z_h} = \pm 1,7 \text{ mm}$$

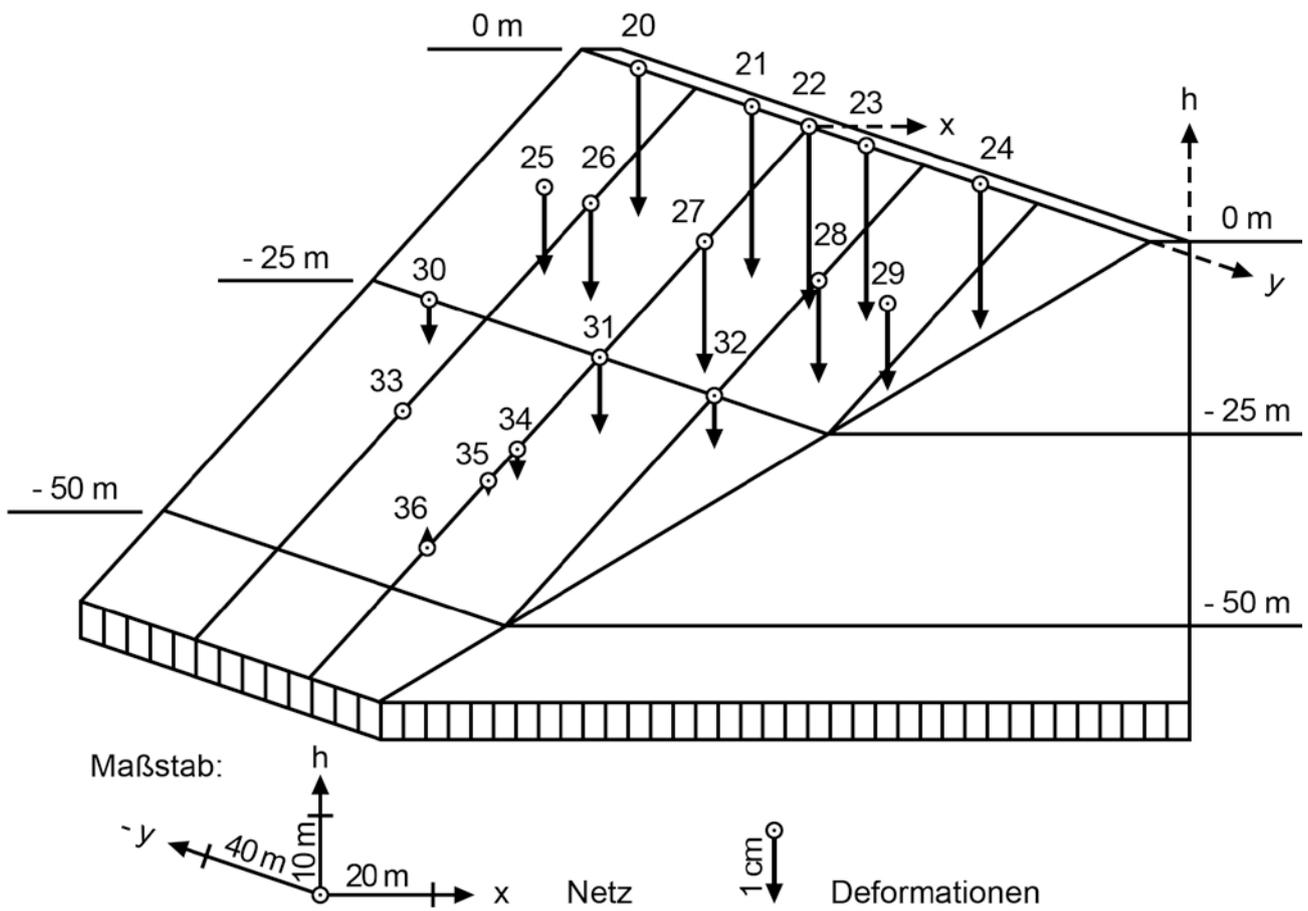


Abbildung 11 Aus der Trendfunktion resultierende Höhenänderungen der Objektpunkte



Abbildung 12 Aus der Trendfunktion resultierende Verschiebungen der Objektpunkte in der xy-Ebene

Die mit den signifikanten Trendparametern berechneten Deformationen der Objektpunkte sind in die Abbildungen 11 und 12 eingezeichnet. Es ist zu erkennen, daß die Höhen- und die x-Komponenten der Deformationsvektoren gut mit den theoretisch zu erwartenden Punktverschiebungen übereinstimmen. Die y-Komponenten, die entsprechend den Vorüberlegungen zur Dammitte zeigen sollten, sind dagegen für alle Punkte mit + 2,6 mm konstant, ein Ergebnis, das möglicherweise auch durch Veränderungen der Anschlußpunkte oder durch eine fehlerhafte Zentrierung hervorgerufen worden ist.

5.2 Mehrepochenanalyse

Als Beispiel für eine Mehrepochenanalyse werden die Höhenmessungen der ersten sechs Beobachtungsepochen des in Beispiel 5.1.2 beschriebenen Staudammüberwachungsnetzes einer gemeinsamen Analyse unterzogen. Die Beobachtungszeitpunkte und die jeweiligen Wasserstände, wieder bezogen auf die Dammkrone, sind Tabelle 12 zu entnehmen. Hinsichtlich der Meßanordnung, der Anzahl der Überbestimmungen und der Meßgenauigkeit gelten die Aussagen in Kapitel 5.1.2. Lediglich in der fünften und sechsten Epoche ist die 1-cm-Holzlatte durch eine 1/2-cm-Invarlatte ersetzt worden, so daß für diese beiden Epochen die a priori Standardabweichung auf $\sigma_h = \pm 1,75 \frac{\text{mm}}{\sqrt{\text{km}}}$ hal-

Epoche	Datum	Wasserstand [m]
1	24.02.72	- 37,5
2	03.08.72	- 20,5
3	03.10.72	- 19,0
4	20.12.72	- 14,5
5	24.04.73	- 7,5
6	01.08.73	- 3,5

Tabelle 12: Beobachtungszeitpunkte und Wasserstände

biert wurde. In Abbildung 13 sind die aus den Epochenausgleichungen resultierenden Höhenänderungen von Epoche zu Epoche graphisch dargestellt. In Zweiepochenanalysen sind, wie in Kapitel 5.1.2 demonstriert, die Einzelpunktbewegungen lokalisiert worden. Neben Punkt 37, der zwischen der ersten und zweiten Epoche eine signifikante, von den übrigen Punkten abweichende Veränderung aufweist, sind bei dem Punkt 28 (zwischen Epoche 2 und Epoche 3)

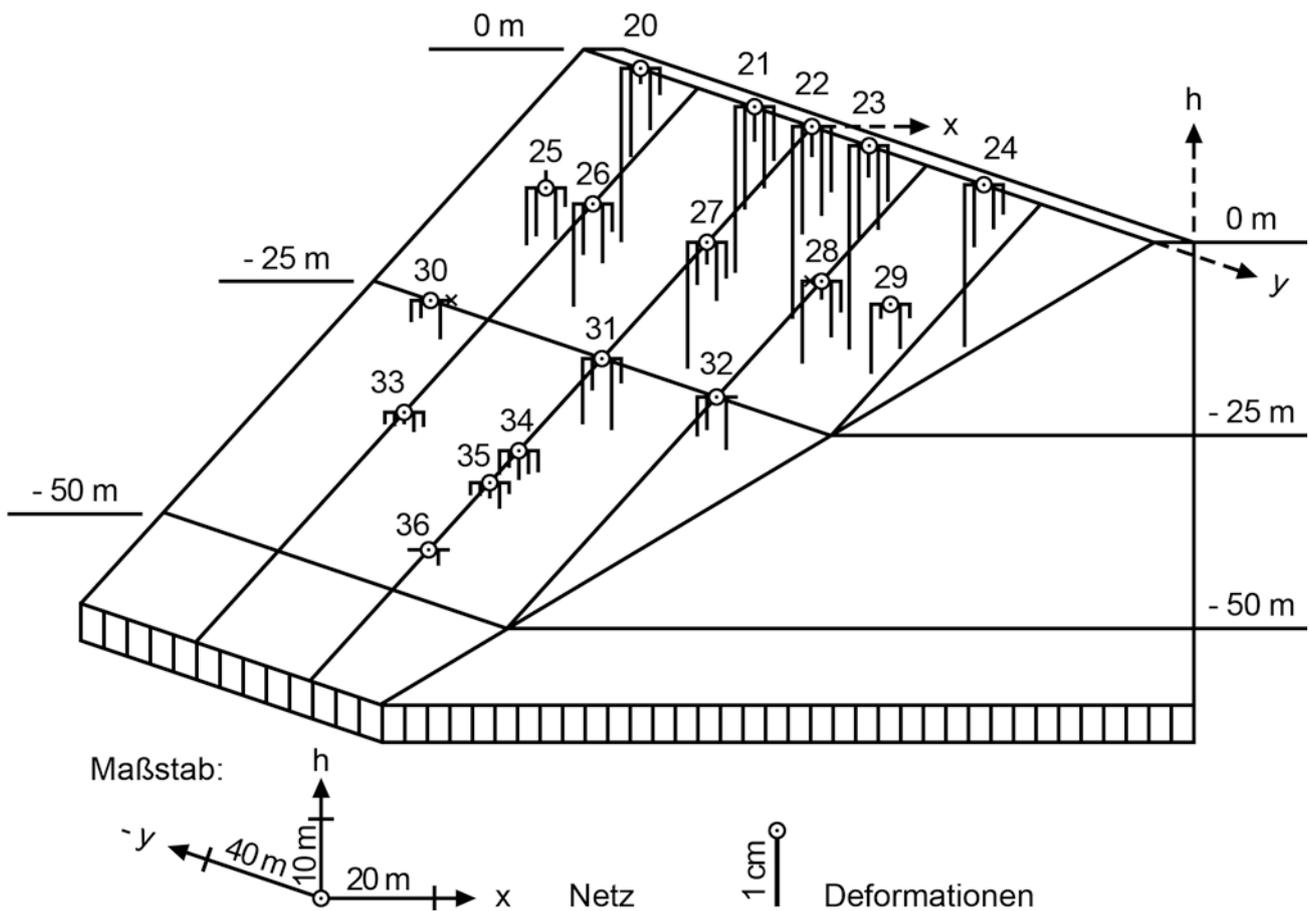


Abbildung 13 Beobachtete Höhenänderungen zwischen den Epochen

und dem Punkt 30 (zwischen Epoche 5 und 6) Einzelpunktbewegungen festgestellt worden (Markierung mit x in Abbildung 13). Da der Punkt 37 ab der dritten Epoche nicht mehr angemessen wurde, ist er für die Mehrepochenanalyse ohne Belang. Der Punkt 28 wird ab der dritten Epoche wie ein neu hinzugekommener Punkt behandelt und mit der neuen Punktnummer 128 bezeichnet. Der Punkt 30 wird aus der letzten Epoche eliminiert. Die auf die Anfangsepoche bezogenen Setzungen für die Punktreihe auf der Dammkrone (Punkt 20 bis Punkt 24) und für die Punktreihe im Dammschnitt (Punkt 22 bis Punkt 35) sind im richtigen zeitlichen Abstand in Diagrammen (Abbildung 14) aufgetragen.

Der Ablauf der Mehrepochenanalyse ist im folgenden wie in den bisherigen Beispielen tabellarisch zusammengestellt. Die Signifikanzniveaus werden für die Einzeltests wieder so gewählt, daß die Gesamtsicherheitswahrscheinlich-

keiten größer als $S = 90\%$ sind. Auf einen Globaltest nach Kapitel 4.2.1 kann in diesem Fall, da die Setzungen offensichtlich sind, verzichtet werden.

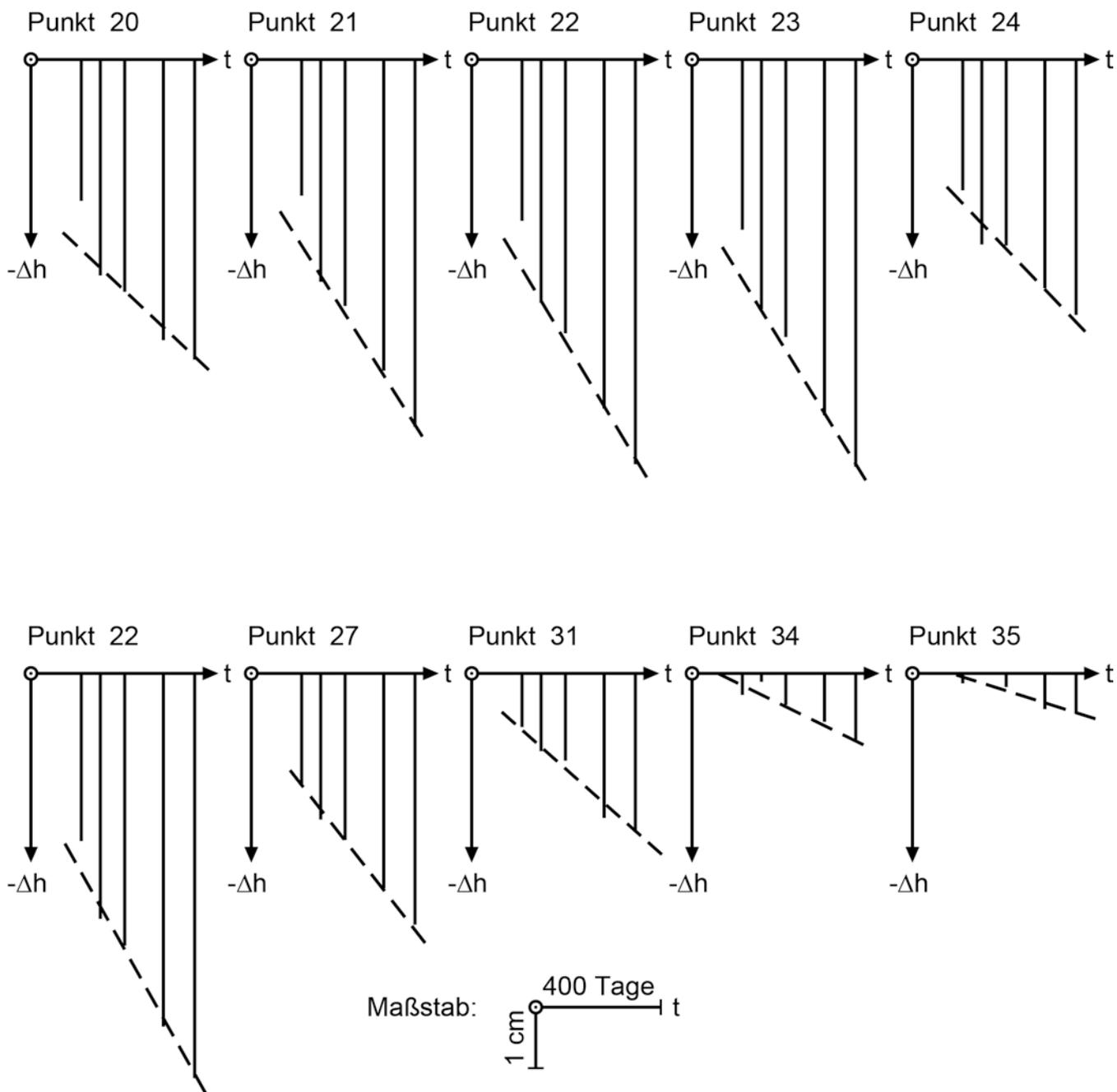


Abbildung 14 Zeit-Setzungsdiagramme für die Kronenpunkte und für die Punkte im Dammquerschnitt (gestrichelt: generalisierende Funktion)

- Generalisierungsmodell

Das Generalisierungsmodell wird abgeleitet aus dem Modell (5.4), indem die geometrische Generalisierung durch ein in der Zeit t quadratisches Polynom auf den Zeitbereich erweitert wird. Da der Wasserspiegel im Beobachtungszeitraum etwa proportional zur Zeit anstieg, wird der Wasserstand nicht als zusätzliche unabhängige Variable eingeführt. Das Analysemodell sieht damit folgendermaßen aus (Index i : Punktnummer; Index j : Beobachtungsepoche):

$$\begin{aligned}
 h_{ij} - e_{ij} = & h_{0i} + \\
 & + a_1 t_j + a_2 |y_i| t_j + a_3 h_i t_j + a_4 y_i^2 t_j + a_5 |y_i| h_i t_j + a_6 h_i^2 t_j + \\
 & + a_7 t_j^2 + a_8 |y_i| t_j^2 + a_9 h_i t_j^2 + a_{10} y_i^2 t_j^2 + a_{11} |y_i| h_i t_j^2 + a_{12} h_i^2 t_j^2 + \\
 & + s_{ij} \quad , \quad \mathcal{P}_{ee} = \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \\
 0_{z_{ij}} + z_{ij} = & s_{ij} \quad , \quad \mathcal{P}_{zz} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1}
 \end{aligned}$$

allgemein: (5.7)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} - \mathbf{e} = \bar{S} \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \mathbf{p} + \mathbf{s} \quad , \quad \mathcal{P}_{ee} = \mathcal{Q}_{ee}^{-1} \\
 \mathbf{0}_z + \mathbf{z} = \quad \quad \quad \mathbf{s} \quad , \quad \mathcal{P}_{zz} = \mathcal{Q}_{zz}^{-1}
 \end{aligned}$$

mit $\bar{\mathbf{y}}^T = (h_{0_{20}}, h_{0_{21}}, \dots, h_{0_{28}}, h_{0_{128}}, h_{0_{29}}, \dots, h_{0_{36}})$ und
 $\mathbf{p}^T = (a_1, a_2, \dots, a_{12})$

Der Vektor \mathbf{y} ist bei 17 Punkten und 6 Epochen, wobei $h_{30,6}$ ausfällt, ein 100×1 Vektor. Die Parametervektoren $\bar{\mathbf{y}}$ und \mathbf{p} haben 18 bzw. 12 Komponenten. Die Blockmatrix \mathcal{Q}_{ee} enthält die aus den Netzausgleichungen resultierenden Kofaktorenmatrizen $\mathcal{Q}_{e_j e_j}$ der ausgeglichenen Punkthöhen h_{ij} zur j -ten Epoche. Korrelationen zwischen den Epochen werden nicht angenommen. Die Zeit t wird auf die erste Epoche bezogen und die Höhen h auf die Dammkrone.

Die Varianz der Gewichtseinheit wird aus den in Beispiel 5.1.2 genannten Gründen mit

$${}_1s_0^2 = \sigma_0^2 = 1 \quad , \quad f_1 = \infty$$

angenommen.

- Ausgleichung im Generalisierungsmodell ohne Zufallsparameter
($\mathbf{Q}_{zz} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$) nach Kapitel 4.2.1

$$q_3 = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_{ee}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{x}}^T = (\hat{\mathbf{y}}^T, \hat{\mathbf{p}}^T)$$

$$455,23 = 38590,54 - 38135,31$$

$$f_3 = \text{rg}(\mathbf{Q}_{ee}) - u = 101 - 30 = 71$$

$${}_3s_0^2 = \frac{455,23}{71} = 6,4$$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{{}_3s_0^2}{\sigma_0^2} = 6,4 \quad \text{Signifikanzschwelle: } F_{5\%(71, \infty)} = 1,3$$

Wegen $F > F_{5\%}$ wird das Modell verworfen und auf das gemischte Modell (5.7) mit $\mathbf{Q}_{zz} \neq \mathbf{0}$ übergegangen.

- Ausgleichung und Analyse im gemischten Generalisierungsmodell
nach Kapitel 4.2.2

vereinfachte Varianzkomponentenschätzung nach (3.79) - (3.83)

$$\mathcal{K}_{zz} = \mathbf{E} \quad ; \quad (\mathcal{P}_{zz})_v = \frac{1}{c_r} \cdot \mathbf{E} \quad ; \quad (\mathcal{P}_{zz})_v = k_v \cdot (\mathcal{P}_{zz})_{v-1}$$

Iterations- index v	0	1	2	3	4
k_v	/	32,19	1,64	1,06	1,00
c_v	100	3,11	1,90	1,79	1,79

Tabelle 13: Iterationen zur Varianzkomponentenschätzung vor der Lokalisierung

Letzte Ausgleichung mit $\mathcal{P}_{zz} = 0,56 \cdot \mathbf{E}$:

$$\Omega = 70,95 \quad ; \quad f = 71 \quad ; \quad s_0^2 = 1,00$$

Modelltest_auf_signifikante_Abweichungen_einzeln_Epochen
(Ausreißertests)_nach (4.35 - (4.42)

maximaler Anteil u_j^2 für Epoche 1 : $u_1^2 = 36,77$

$$\text{Testgröße: } F = \frac{u_1^2}{17} / \frac{Q - u_1^2}{71 - 17} = 3,4$$

Signifikanzschwelle: $F_{1\%(17,54)} = 2,3$

Die erste Epoche kann, da der Schwellenwert $F_{1\%}$ überschritten wird, als nicht modellkonform angesehen werden. Deshalb muß entweder das Generalisierungsmodell geändert werden, etwa mit einer Exponentialfunktion als neuem Ansatz, oder das Modell wird beibehalten und die lokalisierte Epoche aus der Untersuchung gestrichen. Da das Modell (5.7) beibehalten werden soll, wird die erste Epoche aus der Ausgleichung eliminiert. Der Freiheitsgrad in dem auf fünf Epochen reduzierten Modell (5.7) verringert sich entsprechend den gestrichenen Verbesserungsgleichungen um $\Delta f = 17$ auf $f = 54$.

vereinfachte_Varianzkomponentenschätzung_im_reduzierten_Modell

$$\mathcal{K}_{zz} = \mathbf{E} ; (\mathcal{P}_{zz})_v = \frac{1}{c_v} \cdot \mathbf{E} ; (\mathcal{P}_{zz})_v = k_v \cdot (\mathcal{P}_{zz})_{v-1}$$

Iterations- index v	0	1	2	3
k_v	/	1,84	1,17	1,02
c_v	1,57	0,86	0,74	0,73

Tabelle 14: Iterationen zur Varianzkomponentenschätzung nach der Lokalisierung

Letzte Ausgleichung mit $\mathcal{P}_{zz} = 1,37 \cdot \mathbf{E}$:

$$Q = 53,58 ; f = 54 ; s_0^2 = 0,99$$

Die Anteile u_j^2 der fünf Epochen bleiben unterhalb der Signifikanzschwelle, so daß die Nullhypothese $E(\hat{z}) = \mathbf{0}$ angenommen wird.

- zum Vergleich: a posteriori Varianzschätzung im reduzierten Modell ohne Zufallsparameter ($Q_{zz} = 0, z = 0$)

$$\Omega_F = \Omega + \hat{\delta}^T Q_{SS}^{-1} \hat{\delta}$$

$$128,40 = 53,58 + 74,82 \quad {}_3S_0^2 = 2,38 \quad , \quad f = 54$$

- Signifikanztests der Trendparameter durch Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche nach Kapitel 4.2.3 und 3.2.4

Ergebnis der Parameterschätzung im gemischten Modell (5.7)
für Epoche 2 bis Epoche 6

\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	$\hat{a}_4 \cdot 10^4$	$\hat{a}_5 \cdot 10^4$	$\hat{a}_6 \cdot 10^4$	[a]: [mm/100 d]
[a]	[b]	[b]	[c]	[c]	[c]	[b]: [mm/m · 100 d]
- 11,9 ± 2,2	+ 0,02 ± 0,11	- 0,64 ± 0,22	+ 6 ± 16	+ 18 ± 22	- 81 ± 48	[c]: [mm/m ² · 100 d]
\hat{a}_7	$\hat{a}_8 \cdot 10^3$	$\hat{a}_9 \cdot 10^3$	$\hat{a}_{10} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{11} \cdot 10^4$	$\hat{a}_{12} \cdot 10^4$	[d]: [mm/(100 d) ²]
[d]	[e]	[e]	[f]	[f]	[f]	[e]: [mm/m · (100 d) ²]
+ 0,44 ± 0,31	- 1 ± 16	+ 60 ± 32	- 0,5 ± 2,3	- 1,3 ± 3,2	+ 10,2 ± 6,8	[f]: [mm/(m · 100 d) ²]

Tabelle 15: Trendparameter und mittlere Fehler

Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche nach (3.113) - (3.124)

Ergebnis der Zerlegung von $\hat{\rho}^T Q_{\hat{\rho}\hat{\rho}}^{-1} \hat{\rho} = \sum_{i=1}^{12} r_i^2$:

$$\hat{\rho}^T Q_{\hat{\rho}\hat{\rho}}^{-1} \hat{\rho} = (r_1^2)_{a_1} + (r_2^2)_{a_3} + (r_3^2)_{a_4} + (r_4^2)_{a_5} + (r_5^2)_{a_9} + (r_6^2)_{a_7} +$$

$$+ (r_7^2)_{a_6} + (r_8^2)_{a_{12}} + (r_9^2)_{a_{10}} + (r_{10}^2)_{a_2} + (r_{11}^2)_{a_{11}} + (r_{12}^2)_{a_8}$$

$$1155,63 = 726,08 + 226,64 + 186,75 + 5,59 + 2,52 + 3,76 +$$

$$+ 1,08 + 1,74 + 0,88 + 0,38 + 0,21 + 0,003$$

Signifikanztests nach (3.125) - (3.130)

Testgröße: $F = \frac{r_i^2}{\sigma_0^2} = r_i^2$ Schwellenwert: $F_{0,5\%(1,\infty)} = 7,9$

Der Schwellenwert fällt zwischen $(r_3^2)_{a_4}$ und $(r_4^2)_{a_5}$, so daß die Variablen r_1^2 bis r_3^2 den signifikanten und r_4^2 bis r_{12}^2 den nicht signifikanten Parametern zuzuordnen sind:

signifikante Parametergruppe: $\boldsymbol{p}_I^T = (a_1, a_3, a_4)$

nicht signifikante Parametergruppe: $\boldsymbol{p}_{II}^T = (a_2, a_5, a_6, \dots, a_{12})$

endgültiges Ausgleichungsmodell mit den neu zu schätzenden Parametervektoren $\bar{\boldsymbol{y}}$, \boldsymbol{p}_I und \boldsymbol{s} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{e} &= \bar{\boldsymbol{S}}\bar{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}_I\boldsymbol{p}_I + \boldsymbol{s}, & \mathcal{P}_{ee} &= \boldsymbol{Q}_{ee}^{-1} \\ \boldsymbol{0}_z + \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{s}, & \mathcal{P}_{zz} &= \boldsymbol{Q}_{zz}^{-1} = 1,37 \cdot \boldsymbol{E} \end{aligned} \quad (5.8)$$

- Ausgleichung gemäß (5.8)

Trendparameter:

\hat{a}_1	\hat{a}_3	$\hat{a}_4 \cdot 10^4$	
[a]	[b]	[c]	
- 8,51	- 0,1724	+ 9,6	[a]: [mm/100 d]
$\pm 0,28$	$\pm 0,0096$	$\pm 1,9$	[b]: [mm/m · 100 d]
			[c]: [mm/m ² · 100 d]

Tabelle 16: Signifikante Trendparameter

Trendfunktion

$$\tilde{y}(t, h, y) = \hat{a}_1 t + \hat{a}_3 h \cdot t + \hat{a}_4 y^2 \cdot t = (\hat{a}_1 + \hat{a}_3 h + \hat{a}_4 y^2) t \quad (5.9)$$

In (5.9) bezeichnet t die Zeit, die seit der ersten Beobachtungsepoche vergangen ist. Die Höhe h ist auf die Dammkrone bezogen, so daß für alle Punkte $h \leq 0$ gilt.

$$\bar{\Omega} = \Omega + \sum_{i=4}^{12} r_i^2, \quad \bar{f} = f + u_{II}$$

$$69,74 = 53,58 + 16,16 \quad 64 = 54 + 9$$

$$s_0^2 = \frac{69,74}{64} = 1,09$$

$$s_0 = \pm 1,04$$

Größenordnung der Modellrestfehler:

$$s_z^2 = \frac{\sigma_0^2}{1.37} = 0,73 \text{ mm}^2$$

$$s_z = \pm 0,85 \text{ mm}$$

Die mit den signifikanten Trendparametern gemäß (5.9) berechneten Setzungslinien sind für die Punktreihe auf der Dammkrone (Punkt 20 bis Punkt 24) und für die Punktreihe im Dammquerschnitt (Punkt 22 bis Punkt 35) in Abhängigkeit von der Zeit in die Diagramme (Abbildung 145) eingezeichnet. Da die Setzung linear mit der Zeit fortschreitet, sind die ausgleichenden Funktionen Geraden mit erwartungstreu abnehmenden Steigungen von der Dammkrone zum Dammfuß und von der Dammitte zu den Flanken. Eine Abnahme der Setzungsgeschwindigkeit ist für den Beobachtungszeitraum noch nicht zu erkennen. Die relativ große Anfangssetzung von der ersten zur zweiten Epoche war mit dem verwendeten Modell nicht zu erfassen, so daß die erste Epoche auf das Modell bezogen als Ausreißer anzusehen ist.

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung gemischter Modelle auf die Analyse geodätisch gemessener Punktdeformationen beschrieben. Gemischte Modelle sind dadurch gekennzeichnet, daß neben den deterministischen Parametern Zufallsparameter auftreten, deren Erwartungswerte a priori als bekannt vorausgesetzt werden. Darüberhinaus müssen a priori Annahmen über die gegenseitigen Korrelationen der Zufallsparameter getroffen werden. Im Unterschied zu dem Kollokationsmodell schließen gemischte Modelle auch den Fall verschwindender Korrelationen ein. Dieser Fall ist bedeutsam, da das Ziel der Analyse in einer optimalen Filterung der Beobachtungen und nicht in der Prädiktion von Zufallsgrößen liegt. Die Erweiterung des Analysemodells um einen Vektor von Zufallsgrößen soll die unregelmäßigen Punktbewegungen oder die Modellrestfehler, die sich einer deterministischen Beschreibung entziehen und die auch nicht durch die Meßungenauigkeit erklärt werden können, berücksichtigen. Diese Modellrestfehler können sowohl bei einer Generalisierung mittels eines Approximationsmodells als auch bei einer Einzelpunktanalyse ohne deterministischen Modellansatz auftreten.

Nach einer allgemeinen Einführung in die Problematik beschäftigt sich das zweite Kapitel mit der Ausgleichung in gemischten Modellen. Es werden zunächst verschiedene Wege für die Ableitung der Schätzfunktion aller im Modell auftretenden unbekanntenen Größen aufgezeigt, wobei sich unterschiedliche Aspekte für die Interpretation der Größen und für die Programmierung ergeben. Ausführlich wird auf die Behandlung von Rangdefekten insbesondere im stochastischen Teil des Modells eingegangen, da dieses Problem in der Deformationsanalyse von großer Bedeutung ist. Rangdefekte in den Netzausgleichungen führen zu singulären Kofaktorenmatrizen der in die Folgeausgleichungen zur Deformationsanalyse als Beobachtungen eingeführten Punktkoordinaten. Es wird gezeigt, in welcher Weise der Vektor der Zufallsparameter in einem gemischten Modell transformiert werden muß, um den bei einem Rangabfall implizit im Koordinatenvektor enthaltenen Bedingungen Rechnung zu tragen. Daneben werden die Unterschiede zwischen dem Gauß-Markoff-Modell und dem gemischten Modell sowohl analytisch als auch in vereinfachter Form geometrisch herausgearbeitet. Schließlich werden die grundlegenden Beziehungen zwischen den quadratischen Formen der in dem gemischten Modell auftretenden Größen wie die Erwartungswerte und die Verteilungen dieser quadratischen Formen abgeleitet.

Das dritte Kapitel behandelt die Analyse der zwischen zwei Beobachtungsepochen aufgetretenen Punktverschiebungen in einem Zweiepochenmodell. Dabei sind neben der Schätzung der deterministischen Parameter einer generalisierenden Approximationsfunktion davon abweichende große Einzelpunktverschiebungen zu lokalisieren und die Varianzkomponenten zu schätzen, mit denen die Korrelationsmatrix der Zufallsparameter in die Varianz-Kovarianz-Matrix überführt werden kann. Die Korrelationsmatrix der Zufallsparameter muß a priori mittels geeigneter Korrelationsfunktionen oder als Diagonalmatrix aufgestellt werden. Die vom Generalisierungsmodell abweichenden Einzelpunktverschiebungen werden analog der Suche nach Ausreißern bei geodätischen Meßreihen mittels statistischer Testverfahren lokalisiert. In der weiteren Behandlung festgestellter Einzelpunktverschiebungen ergeben sich, je nachdem, ob die Kofaktorenmatrix der Koordinatenunterschiede regulär oder singulär ist, Unterschiede. Die Varianzkomponenten für die Zufallsparameter werden iterativ geschätzt, wobei auf die aus der Literatur bekannten Verfahren zurückgegriffen werden kann. An den Varianzkomponenten kann die Größenordnung der unregelmäßigen Modellrestfehler abgelesen werden. Da sich Einzelpunktlokalisierung und Varianzkomponentenschätzung gegenseitig beeinflussen, sind diese Schritte eventuell mehrmals zu durchlaufen. Abschließend werden die Parameter der generalisierenden Funktion auf Signifikanz untersucht. Bei dem beschriebenen Verfahren (Cholesky-Zerlegung mit Pivotsuche) wird die quadratische Form der Parameter in unkorrelierte Anteile zerlegt. In einem multiplen statistischen Test wird anschließend die Parameterkombination ausgewählt, die modellrelevant ist. Die Vorgehensweise bei der Zweiepochenanalyse beinhaltet als Sonderfall die Einzelpunktanalyse in einem Modell ohne deterministischen Anteil. Die sich dabei ergebenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Vergleich mit der gebräuchlichen Methode der Klaffungszersetzung werden herausgearbeitet.

Das vierte Kapitel behandelt die gleichzeitige Bearbeitung mehrerer Beobachtungsepochen in einem gemeinsamen Auswertemodell (Mehrepochenanalyse). Die Mehrepochenanalyse erlaubt die Modellierung zeitlicher Bewegungsabläufe. Methodisch ergeben sich hinsichtlich der Vorgehensweise bis zur endgültigen Modellfindung gegenüber der Zweiepochenanalyse keine grundlegenden Erweiterungen. An die Stelle der Tests zur Einzelpunktanalyse treten bei der Mehrepochenanalyse jedoch die Modelltests zur Lokalisierung der von dem Generalisierungsmodell abweichenden Beobachtungsepochen. Sind die einzelnen Beobachtungsepochen gegenseitig unkorreliert, so ergeben sich erhebliche re-

chentechnische Vorteile, wenn statt einer Ausgleichung in einem Guß die Parameter sequentiell geschätzt werden. Dabei auftretende Parallelen zur Kalman-Filterung, wo ebenfalls ein gemischtes Modell benutzt wird, werden aufgezeigt.

An drei numerischen Beispielen wird schließlich im fünften Kapitel der Ablauf der Berechnungen und der statistischen Tests bei verschiedenen Deformationsanalysen demonstriert. Die Zweiepochenanalyse wird auf ein zweidimensionales simuliertes Netz mit simulierten Deformationen und auf ein dreidimensional gemessenes Talsperrenüberwachungsnetz angewendet. Für die Mehr-epochenanalyse werden die Höhenbeobachtungen von sechs Beobachtungsepochen des Talsperrenüberwachungsnetzes herangezogen. Die Ergebnisse zeigen die Wirksamkeit der vorgestellten Ausgleichungs- und Teststrategien.

Literaturverzeichnis

- BÄHR, H.-G. und R. RICHTER: *Über die Wahl von a-priori-Korrelationen*. Zeitschrift für Vermessungswesen 100, 180-188, 1975
- BERK, K.N.: *Comparing Subset Regression Procedures*. Technometrics 20, 1-6, 1978
- BRAMMER, K.: *Gaußsche Ausgleichsrechnung und Kalman-Filterung*. Regelungstechnik und Prozeß-Datenverarbeitung 19, 215-217, 1971
- BRUNKEN, G.: *Analyse von Bauwerksbewegungen*. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 88, 386-395, 1981
- CASPARY, W. und P. SCHWINTZER: *Bestimmung von Einzelpunktbewegungen und von Relativbewegungen zweier Netzteile in geodätischen Deformationsnetzen*. Zeitschrift für Vermessungswesen 106, 277-288, 1981
- DERMANIS, A.: *Adjustment of geodetic observations in the presence of signals*. Zeitschrift für Vermessungswesen 104, 505-518, 1979
- DIETRICH, R.: *Zur Bearbeitung von Eisbewegungsmessungen durch Kollokation*. Geodätische und Geophysikalische Veröffentlichungen am Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik bei der Akademie der Wissenschaften der DDR, Berlin 1978
- EBNER, H.: *A posteriori Gewichtsschätzung bei der verallgemeinerten kleinsten Quadrate Ausgleichung*. Geowissenschaftliche Mitteilungen, Technische Universität Wien, Nr. 13, 73-84, Wien 1978
- FLOTRON, A.: *Interpretation von Deformationsmessungen mittels ausgleichender Funktionen*. In: Conzett/Matthias/Schmidt (Hrsg.): *Ingenieurvermessung 80. Beiträge zum VIII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung*, Bd. 2, Dümmler, Bonn E6/1 - E6/14, 1981
- FÖRSTNER, W.: *Konvergenzbeschleunigung bei der a posteriori Varianzschätzung*. Zeitschrift für Vermessungswesen 104, 149-156, 1979
- GHITAU, G.: *Modellbildung und Rechenpraxis bei der nivellitischen Bestimmung säkularer Landhebungen*. Dissertation, Bonn 1970
- GRAFAREND, E.: *Geodetic prediction concepts*. In: Brosowski/Martensen (Hrsg.): *Methoden und Verfahren der mathematischen Physik*, Vol. 13, Mathematical Geodesy, Part II, Ramsau Lecture Notes, BI-Verlag, Mannheim, 162-200, 1975
- GRAFAREND, E.: *Operational Geodesy*. Lecture Notes Ramsau 1977. In: Moritz/Sünkel (Hrsg.): *Approximation Methods in Geodesy*. H. Wichmann, Karlsruhe, 235-284, 1978
- GRAFAREND, E. und B. SCHAFFRIN: *Unbiased free net adjustment*. Survey Review 22, 200-218, 1974
- HARVILLE, D.: *Extension of the Gauß-Markov Theorem to include the estimation of random effects*. The Annals of Statistics 4, 384-395, 1976a
- HARVILLE, D.: *Confidence intervals and sets for linear combinations of fixed and random effects*. Biometrics 32, 403-407, 1976b
- HECK, B.: *Statistische Ausreißerkriterien zur Kontrolle geodätischer Beobachtungen*. In: Conzett/Matthias/Schmidt (Hrsg.): *Ingenieurvermessung 80. Beiträge zum VIII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung*, Bd. 2, Dümmler, Bonn B10/1 - B10/12, 1981

- KOCH, K.-R.: *Least squares adjustment and collocation*. Bulletin Géodésique 51, 127-135, 1977
- KOCH, K.-R.: *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. Dümmler, Bonn 1980
- LORENZ, W. und L. SEETHALER: *Trinkwassertalsperre Mauthaus*. Die Wasserwirtschaft 60, Heft 6, 1-11, 1970
- MILEV, G.: *Untersuchung der Setzungsgesetzmäßigkeiten*. In: Conzett/Matthias/Schmidt (Hrsg.): *Ingenieurvermessung 80. Beiträge zum VIII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung*, Bd. 2, Dümmler, Bonn E5/1 - E5/7, 1981
- MORITZ, H.: *Advanced least squares methods*. Report of the Dept. of Geodetic Science, number 175, The Ohio State University, Columbus, Ohio 1972
- MORITZ, H.: *Stepwise and sequential collocation*. Report of the Dept. of Geodetic Science, number 203, The Ohio State University, Columbus, Ohio 1973a
- MORITZ, H.: *Least Squares Collocation*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 75, München 1973b
- PAPOULIS, A.: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, Tokyo 1965
- PELZER, H.: *Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 164, München 1971
- PELZER, H.: *Neuere Ergebnisse bei der statistischen Analyse von Deformationsmessungen*. XIV. FIG-Kongreß, Washington, Proceedings, Beitrag 608.3, 1974
- PELZER, H.: *Großräumige Nivellementsnetze, insbesondere im Hinblick auf die Erfassung von Krustenbewegungen*. In: Pelzer (Hrsg.): *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung*. Wittwer, Stuttgart, 351-370, 1980
- PUGACHEV, V.S.: *Theory of Random Functions*. Pergamon Press, Oxford 1965
- RAO, C.R.: *Linear statistical inferences and its applications*. John Wiley & Sons Inc., New York 1973
- RUMMEL, R.: *A model comparison in Least Squares Collocation*. Bulletin Géodésique 50, 181-192, 1976
- SCHAFFRIN, B.: *Varianz-Kovarianz-Komponenten-Schätzung bei der Ausgleichung heterogener Wiederholungsmessungen*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 282, München 1983
- SCHÖBER, W.: *Überlegungen und Untersuchungen für den Entwurf eines Steinschüttdammes mit einem 92 m hohen Dichtungskern aus bituminöser Mischung*. In: *Die Talsperren Österreichs*. Schriftenreihe des Österr. Wasserwirtschaftsverbandes, Österreichische Beiträge zum 11. Talsperrenkongreß in Madrid 1973, Springer, Wien, 93-112, 1974
- SCHWINTZER, P.: *Zur Generalisierung von Deformationsvektoren mit gemischten Modellen*. In: Joó/Detreköi (Hrsg.): *Deformationsmessungen*. Proceedings zum III. Int. Symposium über Deformationsmessungen mit geodätischen Methoden, Budapest 1982, Ungarische Akademie der Wissenschaften, Budapest, 453-463, 1983

- SCHWINTZER, P.: *Zur Bestimmung der signifikanten Parameter in Approximationsfunktionen.* In: Caspary/Schödlbauer/Welsch (Hrsg.): *10 Jahre Hochschule der Bundeswehr München. Beiträge aus dem Institut für Geodäsie.* Schriftenreihe Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen HSBw, München 1984
- SEARLE, S.R.: *Linear Models.* John Wiley & Sons, New York 1971
- SEARLE, S.R.: *Variance components estimation. A review, in note form.* Paper No. BU-651-M in the Biometrics Unit, Department of Plant Breeding and Biometry, Cornell University, Ithaca, New York 1978
- SEBER, G.A.F.: *Linear Regression Analysis.* John Wiley & Sons, New York 1977
- SNAY, R. und M. CLINE: *Crustal Movement Investigations at Tejon Ranch, California.* NOAA Technical Report NOS 87 NGS 18, Rockville, Md. 1980
- STRANG VAN HEES, G.L.: *Collocation and Adjustment.* Zeitschrift für Vermessungswesen 106, 223-228, 1981
- WELSCH, W.: *Gegenwärtiger Stand der geodätischen Analyse und Interpretation geometrischer Deformationen.* Allgemeine Vermessungsnachrichten 88, 41-51, 1981
- WOLF, H.: *Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Dümmler, Bonn 1968
- WOLF, H.: *Ausgleichsrechnung - Formeln zur praktischen Anwendung.* Dümmler, Bonn 1975
- WOLF, H.: *Die Sonderfälle der diskreten Kollokation.* Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 65, 132-138, 1977

Lebenslauf

Name : Peter Schwintzer
Geburtstag : 14.12.1950 in Wesel
Familienstand : verheiratet seit 1976
zwei Kinder

Schulbildung : Volksschule Wesel
1957 - 1961 Staatliches Gymnasium Wesel,
1961 - 1970 Abschluß: Abitur

Wehrdienst : Grundwehrdienst in Oldenburg
1970 - 1971

Berufsausbildung : drei Monate Berufspraktikum
1971 - 1976 Geodäsie-Studium an der Universität Bonn;
Abschluß: Diplom
1976 - 1978 Vorbereitungsdienst für den höheren ver-
messungstechnischen Verwaltungsdienst Münster;
Abschluß

Berufsarbeit : Vermessungsarbeiten für das Katasteramt
Okt. 1978 Steinfurt
1978 - 1983 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Studiengang
Vermessungswesen an der Hochschule der Bundes-
wehr München (Lehrstuhl für Ingenieurgeodäsie,
Prof. Dr.-Ing. W. Caspary)

Schriftenreihe

Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen

Hochschule der Bundeswehr München

Bisher erschienene Hefte :

(Die Hefte erscheinen in zwangloser Folge)

- Nr. 1/78 A. Schödlbauer :
Curriculum für den wissenschaftlichen Studiengang Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München
- Nr. 2/78 A. Chrzanowski and E. Dorrer (Eds.) :
Proceedings "Standards and Specifications for Integrated Surveying and Mapping Systems", Workshop held in Munich, 1-2 June 1977
- Nr. 3/78 W. Caspary und A. Geiger :
Untersuchungen zur Leistungsfähigkeit elektronischer Neigungsmesser
- Nr. 4/79 E. Baumann, W. Caspary, H. Dupraz / W. Niemeier /
H. Pelzer, E. Kuntz / G. Schmitt, W. Welsch :
Seminar über Deformationsanalysen
- Nr. 5/81 K. Torlegård :
Accuracy Improvement in Close Range Photogrammetry
- Nr. 6/82 W. Caspary und W. Welsch (Hrsg.) :
Beiträge zur großräumigen Neutrassierung
- Nr. 7/82 K. Borre and W.M. Welsch (Eds.) :
Proceedings "Survey Control Networks",
Meeting of FIG-Study Group 5B, Aalborg, 7-9 July 1982
- Nr. 8/82 A. Geiger :
Entwicklung und Erprobung eines Präzisionsneigungstisches zur Kalibrierung geodätischer Instrumente
- Nr. 9/83 W. Welsch (Hrsg.) :
Deformationsanalysen '83
- Nr. 10/84 W. Caspary, A. Schödlbauer und W. Welsch (Hrsg.) :
Beiträge aus dem Institut für Geodäsie
- Nr. 11/84 W. Caspary und H. Heister (Hrsg.) :
Elektrooptische Präzisionsstreckenmessung
- Nr. 12/84 P. Schwintzer :
Analyse geodätisch gemessener Punktlageänderungen mit gemischten Modellen

